This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

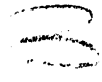
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

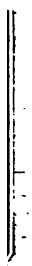
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06636594 5



(Bossuet)



COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
PAR

CHARLES BOSSUT,

MEMBRE DE L'INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES ET DES ARTS, etc.

NOUVELLE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME SECOND.

GÉOMÉTRIE, ET APPLICATION DE L'ALGEBRE
A LA GÉOMÉTRIE.

Avec une Lettre du cit. CARNOT *au cit.* BOSSUT, *contenant quelques vues nouvelles sur la trigonométrie.*

ASTOR LIBRARY NEW-YORK PUBLIC

A PARIS,

RUE DE THIONVILLE, n° 116,

Chez FIRMIN DIDOT, libraire pour les mathématiques et l'architecture.

AN IX — 1800.

DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

L'OBJET de la géométrie est plus déterminé et moins abstrait que celui de l'analyse. Cette derniere branche des mathématiques compare ensemble toutes sortes de quantités, et les symboles qu'elle emploie représentent des rapports généraux et purement intellectuels. La géométrie considere la grandeur en tant seulement qu'elle est étendue et figurée : elle emprunte le secours de la vue ou du toucher pour établir les relations que les lignes, les superficies et les solides ont avec leur unité fondamentale.

On fait remonter fort haut dans l'antiquité les premieres notions que les hommes ont eues de la géométrie. Sans rapporter ici toutes les origines vraies ou fabuleuses qu'on lui attribue, écoutons seulement ce qu'en dit Hérodote, le premier des anciens qui ait écrit l'histoire en prose; car auparavant on n'écrivoit qu'en vers, tout étoit embelli et dénaturé par les fictions de la poésie. Cet auteur parle ici d'après ce qu'il avoit appris lui-même dans ses voyages à Thebes et à Memphis (1). *On me dit que SÉSOSTRIS avoit partagé l'Egypte entre tous les Egyptiens, et qu'il avoit donné à chacun une égale portion de terre en quarré, à la charge d'en payer par an un certain tribut : si la portion de quelqu'un étoit diminuée par la riviere, il alloit trouver le roi et lui exposoit ce qui étoit arrivé dans sa terre ; en même temps le roi envoyoit sur les lieux, et faisoit mesurer l'héritage, afin de savoir de combien il étoit diminué, et de ne faire payer le tribut que selon ce qui étoit resté de terre. Je crois*, ajoute le même auteur,

(1) Hérod. Liv. II.

que ce fut de là que la géométrie prit naissance, et qu'elle passa chez les Grecs. Les meilleurs chronologistes croient que Sésostris est le même que le roi Sésac qui fit la guerre à Roboam, fils de Salomon. Si cette conjecture est fondée, il vivoit environ mille ans avant l'ere chrétienne.

Il seroit long et difficile de suivre pas à pas dans la nuit des temps les progrès de la géométrie. Je ne me livrerai donc pas à cette recherche, sur laquelle on peut consulter d'ailleurs l'Histoire des Mathématiques de Montucla, ouvrage également recommandable par le savoir, la clarté et l'exactitude qui y regnent. Je me borne à quelques considérations générales.

La plupart des anciens philosophes ont cultivé et enrichi la géométrie. On attribue à Thalès de Milet (1) le premier usage de la circonférence du cercle pour la mesure des angles. Il détermina la hauteur des pyramides de l'Egypte par l'étendue de leur ombre; méthode qui ne pouvoit avoir d'autre base que la théorie des triangles semblables, ou des lignes proportionnelles. Pythagore (2) trouva le fameux théorême, que *le quarré de l'hypoténuse du triangle rectangle est égal en surface à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés.* Il fut si charmé de cette découverte, que, dans l'ivresse de sa joie, il sacrifia, dit-on, cent bœufs aux dieux pour les remercier de l'avoir si bien inspiré. On a de la peine à concilier ce fait avec les idées religieuses de l'auteur sur la transmigration des ames : mais qu'il soit vrai ou faux, on peut affirmer que jamais contentement ne fut plus légitime que celui de Pythagore. La proposition dont il s'agit est une des plus belles et des plus fécondes de toute la géométrie.

Cette science s'accrut rapidement chez les Grecs, et on leur doit presque toutes les propositions élémentaires

(1) Environ 640 ans avant Jésus-Christ.
(2) Environ 590 ans avant Jésus-Christ.

qui forment ce qu'on appelle encore aujourd'hui les *éléments de géométrie*. Ces premiers mathématiciens employoient dans leurs démonstrations la synthese, ou la méthode de *composition*, qui consiste à chercher les propriétés d'une figure ou d'un solide, par des considérations puisées directement dans sa nature ou dans sa génération, et par un enchaînement de rapports qui menent, de principes connus ou déja démontrés, à la proposition dont on veut établir la vérité. Il y a de précieux avantages attachés à cette méthode. Elle marche toujours le flambeau de l'évidence à la main ; et souvent elle fait trouver avec une extrême facilité des théorêmes qui seroient difficiles à découvrir par toute autre voie, ou qui du moins se présenteroient sous une forme moins élégante. Les modernes ont un peu négligé la synthese, parceque l'analyse leur a fourni dans la plupart de leurs recherches des secours plus prompts, plus universels, et quelquefois absolument indispensables. Cependant quelques uns d'entre eux l'ont cultivée avec succès, et en ont fait de très belles applications ; tels sont principalement Huyghens, Pascal, Newton et Maclaurin.

Les propositions de géométrie élémentaire, éparses et isolées dans les écrits des premiers inventeurs, furent rassemblées par Euclide (1), géometre de l'école d'Alexandrie, qui y ajouta de son propre fonds, et qui forma du tout le fameux livre connu sous le nom d'*Eléments d'Euclide*. Cet ouvrage est divisé en treize livres, dont dix seulement regardent la géométrie ; les trois autres appartiennent à l'arithmétique. L'auteur étoit un philosophe vertueux, modeste et ingénu. On rapporte que Ptolomée Philadelphe, roi d'Egypte, qui vouloit s'instruire dans les mathématiques, lui ayant demandé s'il ne pourroit pas les apprendre plus facilement que par la route ordinaire, il répondit : *Non, prince, il n'y a point de chemin particulier pour les rois.*

(1) Environ 300 ans avant Jésus-Christ.

Euclide ne donne aucun moyen de comparer la surface du cercle avec celle d'une figure rectiligne. Il démontre bien, à la vérité, que les circonférences de différents cercles sont entre elles comme leurs rayons ; que les aires de deux cercles sont comme les quarrés de leurs rayons ; qu'un cylindre est égal au produit de sa base et de sa hauteur ; qu'un cône est le tiers du cylindre de même base et de même hauteur : mais il n'enseigne point à comparer la circonférence du cercle avec une ligne droite ; et, faute de cette connoissance, on ne pouvoit avoir la valeur absolue de l'aire du cercle, ni celle de la solidité du cylindre et du cône. Archimede (1), qu'on regarde à juste titre comme le plus grand géometre de l'antiquité, est le premier qui ait résolu, du moins d'une maniere approchée, cet important problême. Ayant d'abord observé que le côté de l'exagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon, il supposa deux suites de polygones réguliers inscrit et circonscrit au cercle, correspondants l'un à l'autre, et allant en progression géométrique double ; les deux premiers avoient chacun six côtés, et les deux derniers chacun quatre-vingt-seize côtés ; par la connoissance du côté du premier polygone inscrit, il calcula les contours de tous ces polygones : le résultat fut que les contours des deux derniers polygones inscrit et circonscrit, ne différoient que d'une petite quantité ; et comme la circonférence du cercle est comprise entre eux, Archimede conclut qu'en représentant le diametre par le nombre 7, la circonférence est représentée par un nombre plus grand que 21, et moindre que 22, mais beaucoup plus approchant de 22 que de 21. La même méthode peut servir à assigner d'autres nombres qui expriment d'une maniere encore plus exacte le rapport du diametre à la circonférence. On a cherché vainement depuis Archimede des nombres qui exprimassent ce rapport

(1) Environ 250 ans avant Jésus-Christ.

à la rigueur et sans rien négliger. Les géometres regardent la solution de ce problème, ou, ce qui en est la suite, la quadrature du cercle, sinon comme impossible, du moins, ce qui revient au même pour nous, comme introuvable par les moyens que la géométrie actuelle peut offrir. Si on a pu concevoir un moment l'espérance de la trouver, c'est dans le siecle dernier, à la naissance des calculs différentiel et intégral : car cette méthode a rectifié et quarré des courbes qui avoient été l'écueil de l'ancienne géométrie. Mais le cercle lui a résisté ; et il n'y a plus aujourd'hui que les commençants, ou même des gens tout-à-fait étrangers à la géométrie, qui cherchent la quadrature absolue et rigoureuse du cercle.

On doit au même Archimede plusieurs autres propositions de géométrie ; telle est, par exemple, la détermination du rapport entre la surface ou la solidité de la sphere, et la surface ou la solidité du cylindre circonscrit : détermination qu'il regardoit comme la plus brillante de ses découvertes ; car il ordonna qu'on gravât sur son tombeau un cylindre circonscrit à la sphere.

Le cercle n'est pas la seule courbe que les anciens aient connue : dans le temps même que la géométrie élémentaire se perfectionnoit et s'enrichissoit, ils contemplerent la parabole, l'ellipse et l'hyperbole ; courbes fameuses sous le nom général de *sections coniques*, parcequ'elles se forment sur la surface du cône coupé en différents sens par un plan. On croit que Platon (1) est le premier qui ait fait attention à ces courbes. Menechme, Dinostrate, Aristée, etc. commencerent à les approfondir. Archimede quarra la parabole. Il fit voir qu'elle est les deux tiers du rectangle circonscrit. Il démontra aussi que le paraboloïde, ou le solide produit par la révolution d'une demi-parabole autour de son axe, n'est que la moitié du cylindre de même base et de même hauteur. Peu de temps

(1) Environ 380 ans avant Jésus-Christ.

après, Apollonius (1), géometre de l'école d'Alexandrie, écrivit sur les sections coniques un traité fort étendu, dans lequel on trouve toutes les propriétés de ces courbes par rapport à leurs axes et à leurs diametres ; la maniere d'en mener les tangentes ; la comparaison de deux sections coniques semblables, etc. A ces propositions générales, déja connues pour la plupart, Apollonius en ajoute un grand nombre d'autres, alors nouvelles et d'une recherche plus profonde. Par exemple, il démontre que dans l'ellipse ou l'hyperbole le parallélogramme circonscrit à deux diametres conjugués est égal au parallélogramme circonscrit aux deux axes ; que dans l'ellipse la *somme*, et dans l'hyperbole la *différence* des quarrés de deux diametres conjugués est égale à la somme ou à la différence des quarrés des axes : il résout plusieurs questions concernant les plus grandes ou plus petites lignes qu'on peut mener de certains points aux circonférences des sections coniques, etc. L'ouvrage d'Apollonius porte par-tout l'empreinte d'un génie inventeur : aussi fit-il donner à l'auteur, de son vivant même, le surnom de grand géometre. Apollonius étoit en effet supérieur à tous ses contemporains ; et s'il n'enleve pas à Archimede la premiere place parmi les anciens géometres, on ne peut pas lui contester la seconde.

La théorie des sections coniques étoit à peine ébauchée qu'on eut occasion de l'appliquer au fameux problême de la duplication du cube, lequel consistoit à trouver le côté d'un cube double d'un cube proposé. L'imagination des Grecs, toujours portée au merveilleux, a donné une origine brillante à cette recherche. Plusieurs auteurs racontent que les Athéniens ayant irrité Apollon, qui pour se venger envoya la peste dans leur pays, l'oracle du temple de Délos, consulté sur les moyens d'appaiser le dieu, avoit répondu qu'il falloit lui élever un autel

(2) Environ 200 ans avant Jésus-Christ.

cubique, exactement double d'un autre autel qu'il avoit déja dans la même forme. Les prêtres ajoutoient au problême une condition qui n'en augmentoit pas la difficulté géométrique; ils demandoient que la matiere du nouvel autel fût de l'or. Aussitôt la question est proposée à tous les savants de la Grece : ils travaillent à la résoudre avec la regle et le compas; car on ne regardoit alors comme géométriques que les seules opérations exécutées avec ces deux instruments; mais leurs efforts furent inutiles. Après l'avoir tournée dans tous les sens, ils virent qu'elle se réduisoit à trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, et qu'on obtenoit ces deux lignes par les intersections de deux sections coniques. La trisection de l'angle, autre problême à-peu-près de même date et non moins célebre, fut rappelée à des principes semblables. Dans la suite on a varié ces solutions de toutes les manieres possibles; mais on n'y a rien ajouté dans le fond, parcequ'elles ne laissent en effet rien à desirer.

Nous devons encore aux anciens quelques autres courbes; telles que la quadratrice de Dinostrate, la spirale d'Archimede, la cissoïde de Dioclès, et la conchoïde de Nicomede. Toutes ces courbes, si l'on excepte la spirale d'Archimede, ont été imaginées au sujet des deux problémes que je viens d'indiquer.

Dans les fréquentes applications que les anciens faisoient de la géométrie à la pratique, ils sentirent bientôt le besoin et ils chercherent les moyens de déterminer les dimensions d'un triangle rectiligne par la relation de ses côtés et de ses angles; ce qui est l'objet de la trigonométrie ordinaire. De proche en proche les astronomes géometres découvrirent les principaux théorêmes de la trigonométrie sphérique, c'est-à-dire, ceux qui se présentoient le plus souvent dans la pratique de leur astronomie. Cependant le calcul trigonométrique en général ne commença qu'au temps des Arabes à prendre une forme réguliere, et telle à-peu-près qu'on la suit encore aujourd'hui.

En lisant avec attention les anciens géometres, on apperçoit facilement qu'ils possédoient une espece d'analyse ressemblante à la nôtre par les principes, traitant les quantités connues comme les inconnues, et cherchant les rapports qu'elles ont les unes avec les autres. Mais ils n'avoient pas su la généraliser et la réduire en calcul. Chaque question particuliere exigeoit d'eux une méthode qui, pour ainsi dire, y fût propre individuellement. Quelque génie, quelque élégance qu'ils missent dans leurs solutions, on regrettoit souvent qu'elles fussent trop bornées et trop pénibles. Il étoit à desirer que le géometre, s'élevant à une plus grande hauteur, pût embrasser d'un même coup-d'œil et comprendre dans une même formule générale toute une famille de problêmes. C'est à quoi les modernes parvinrent en appliquant l'algebre à la géométrie. Cette heureuse alliance produisit dans l'empire des mathématiques une révolution qui en recula prodigieusement les limites.

La gloire d'avoir fait les premieres applications de l'algebre à la géométrie appartient à la France. Viete (1) imagina de représenter les grandeurs géométriques par les symboles de l'algebre, et de traduire en équations les propriétés de l'étendue. Par-là, des vérités très cachées, et qu'une profonde méditation auroit de la peine à saisir dans l'ordre de leur développement synthétique, se présentent simplement, et naissent, pour ainsi dire, d'elles-mêmes sous la plume du calculateur. Viete apprit l'art de résoudre ainsi les problêmes déterminés de géométrie. Parmi les usages qu'il fit de sa méthode, il trouva que le problême de la trisection de l'angle mene à une équation du troisieme degré, qui tombe dans le cas irréductible : résultat singulier, et devenu très intéressant par l'avantage qu'on a aujourd'hui de pouvoir résoudre cette classe d'équations, d'une maniere approchée, avec le secours des tables des sinus. De même, il trouva que le problême de la duplication du cube mene à une équation du troisieme degré, mais que cette

(1) En 1594.

équation n'a qu'une seule racine réelle, et que les deux autres sont imaginaires.

Descartes (1) eut une idée non moins originale et plus féconde encore que celle de Viete : il appliqua l'algebre à la théorie des courbes. Il regarde une courbe comme engendrée par les extrémités d'une suite de lignes variables, qui répondent à d'autres lignes aussi variables ; et après avoir formé une équation qui exprime la loi suivant laquelle ces deux suites de lignes varient les unes par rapport aux autres, il construit la courbe : il suit sa marche dans l'espace ; il détermine ses tangentes, ses perpendiculaires, et en général toutes les affections qui la caractérisent. Cette méthode réunit sous un même point de vue la simplicité et la généralité. Ainsi, par exemple, une même équation du second degré entre l'abscisse et l'ordonnée, combinées avec des quantités constantes, peut exprimer en général la nature des trois sections coniques ; et on la restreindra ensuite, dans chaque cas particulier, à exprimer une parabole, une ellipse, ou une hyperbole, selon les valeurs relatives qu'on attribuera aux quantités constantes. Newton a fait, suivant ce principe, l'énumération des courbes du troisieme ordre, ou des courbes dont la nature est exprimée par une équation du troisieme degré entre les deux coordonnées variables. L'ouvrage qu'il a écrit sur ce sujet est principalement recommandable par différents artifices de calcul qu'il a imaginés pour se conduire dans cet immense labyrinthe. Il a été commenté, éclairci et perfectionné par plusieurs savants géometres, tels que Maclaurin, Nicole, Stirling, de Gua, etc. De notre temps, Euler et Cramer ont traité dans toute son étendue la théorie des courbes algébriques, l'un dans son livre intitulé, *Introductio in analysin infinitorum*, et l'autre dans son *Analyse des courbes algébriques*. Ces deux excellents ouvrages doivent être lus par tous ceux qui veulent pénétrer dans la géométrie transcendante.

L'impulsion que Viete et Descartes avoient donnée à la géométrie se fit sentir d'un bout de l'Europe à l'autre. On

(1) En 1637.

1775, dans ma *Méchanique*, à démontrer, d'une maniere directe et générale, la théorie du mouvement des centres de gravité, sans faire, comme Newton, d'Alembert, et les autres géometres qui ont écrit sur ce sujet, aucune décomposition de mouvements. Ma démonstration, fondée sur la synthese et sur la composition des rapports, est un exemple de l'avantage que les méthodes synthétiques ont quelquefois sur les calculs analytiques. Je renvoie cette proposition à la méchanique, où elle trouvera naturellement sa place et son application.

FAUTE A CORRIGER.

Page 7, ligne 1, *au lieu de ces mots* le côté, *lisez* la pointe de l'angle.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

Définitions et Notions préliminaires.

---

1. La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue.

2. On distingue trois especes d'étendues : la *ligne*, la *superficie* ou la *surface*, et le *solide* ou le *corps*. La ligne est une étendue en longueur seulement ; la superficie est une étendue en longueur et largeur ; le solide est une étendue en longueur, largeur et profondeur.

L'extrémité d'une ligne s'appelle *point* : on peut considérer le point comme une ligne dont la longueur est devenue zéro ; semblablement, on peut considérer la ligne comme une surface dont la largeur s'est évanouie, et la surface comme un solide dont la profondeur s'est évanouie.

3. La ligne et la superficie ne peuvent pas exister par elles-mêmes, et indépendamment du solide : elles y sont toujours attachées. La superficie est comme l'enveloppe extérieure ou

une portion de l'enveloppe extérieure du solide; et la ligne est comme le bord ou une portion du bord de la superficie. Mais il est toujours permis et quelquefois nécessaire de séparer, par la pensée, la ligne et la superficie d'avec le solide, et d'imaginer que la ligne ou la superficie existe seule. En effet, si je veux, par exemple, connoître la distance de Paris à Lyon, il est clair que je dois considérer simplement la longueur du chemin qui mene d'une ville à l'autre, sans songer à la largeur de ce chemin, ni à la profondeur du terrain sur lequel il est établi. Si je veux mesurer l'étendue du plancher de ma chambre, j'en dois considérer la longueur et la largeur, et je ne dois point m'occuper du solide couvert par ce plancher. Mais si on me demande la capacité d'un vase, pour savoir combien ce vase peut contenir de pintes d'eau, il faut que j'aie égard tout-à-la-fois aux trois dimensions, longueur, largeur et profondeur.

4. Il y a en général deux sortes de lignes, la ligne *droite* et la ligne *courbe*.

La ligne droite est celle AB (Fig. 1) qui va d'un point A à un autre B, sans se détourner en aucun sens; elle peut être regardée comme produite par le mouvement du point A qui marche de A vers B, en suivant toujours la même direction.

Une ligne ACB, ou ACCB, composée de plusieurs lignes droites qui forment des brisures en C, s'appelle *ligne brisée*.

La ligne ADB, qui se détourne successivement à chaque pas infiniment petit de la direction rectiligne, s'appelle *ligne courbe*, ou simplement *une courbe;* elle peut être regardée comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes brisées.

5. La ligne droite exprime la distance ou le plus court chemin d'un point A à un autre B. Ce plus court chemin est nécessairement *unique;* de sorte que du point A au point B on ne peut mener qu'une seule ligne droite, ou que si on en veut mener plusieurs elles se confondront toutes en une seule et même ligne. En d'autres termes, *deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite.* Mais du point A au point B, on peut mener une infinité de lignes brisées ACB,

ACCB, ou de courbes ADB. Toutes ces lignes sont plus longues que la droite AB.

6. On appelle *plan*, ou superficie *plane*, une surface sur laquelle on peut tracer des lignes droites en toutes sortes de sens : tel est le dessus d'une table bien unie, ou d'une feuille de papier bien tendue. Toute surface qui n'a pas cette propriété s'appelle en général *surface courbe.*

7. Les lignes droites se tracent sur le papier, en faisant glisser, le long d'une regle bien dressée, une plume, un crayon, qui laisse à sa suite une empreinte d'encre, de sanguine, ou de mine de plomb, etc. Sur le terrain, on plante, de distance en distance, des piquets dans l'alignement d'un même rayon visuel; et, d'un piquet à l'autre, on trace des sillons qui s'assemblent bout à bout, et forment ainsi une ligne droite continue.

Toutes les lignes, même celles qu'on trace sur le papier, ont de la largeur, parceque la pointe d'une plume ou d'un crayon a toujours une certaine surface, et parceque d'ailleurs il est nécessaire que les lignes paroissent sensibles à nos yeux. Mais on doit faire abstraction de leur largeur, et ne considérer en elles que la longueur.

8. Deux lignes BA, CA, (Fig. 2, 3, 4) qui se rencontrent en un point A, forment une ouverture BAC, qu'on appelle un *angle.* Cet angle est *rectiligne* (Fig. 2), lorsque ses *côtés* ou *jambes* BA, CA sont des lignes droites; il est *curviligne* (Fig. 3), lorsque ses jambes sont des lignes courbes; il est *mixtiligne* (Fig. 4), lorsqu'une jambe est droite et l'autre courbe.

On doit bien prendre garde qu'un angle n'est point l'espace compris entre ses côtés, mais uniquement l'inclinaison que ses côtés ont, l'un par rapport à l'autre, à leur intersection A. Ainsi la grandeur d'un angle ne dépend point de la longueur de ses côtés; en sorte que si, par exemple, on prolonge les côtés AB, AC de l'angle rectiligne BAC (Fig. 2) vers D et E, ces côtés, quoique devenus plus longs, conserveront

toujours, l'un à l'égard de l'autre, la même situation ou inclinaison, ou formeront toujours le même angle. Il en est de même pour les angles curvilignes, ou mixtilignes. Car, par exemple, l'angle curviligne BAC (Fig. 3), est la même chose que l'angle rectiligne MAN formé par les droites MA, NA, qui touchent les courbes AB, AC au sommet A, et qui ont par conséquent les mêmes directions que ces courbes à leur origine; il demeure donc toujours constant, quelles que soient les longueurs de ses côtés AB, AC.

Ordinairement on désigne un angle par trois lettres, dont celle du milieu répond au *sommet* ou pointe de l'angle; mais quelquefois on se contente d'employer, pour cela, la simple lettre du sommet.

J'avertis, une fois pour toutes, que, lorsque dans la suite je parlerai d'angles, j'aurai en vue les angles rectilignes, à moins que je ne dise ou n'indique expressément le contraire.

J'avertis aussi que les figures dont je parlerai seront supposées tracées sur un même plan : les cas d'exception seront formellement énoncés.

9. Lorsque deux lignes droites CE, DB (Fig. 5), se coupent, elles forment, l'une à l'égard de l'autre, des angles qu'on appelle *angles de suite*. Ainsi, le point A étant l'intersection de ces deux lignes, CAB, CAD sont des angles de suite; de même, CAD, DAE sont des angles de suite.

10. Si (Fig. 6) la droite CE tombe *perpendiculairement*, ou sans pencher d'aucun côté, sur DB, ou, ce qui revient au même, si les deux angles de suite CAB, CAD sont égaux, chacun d'eux se nomme un *angle droit*.

11. On appelle *angle aigu* celui qui est moindre que l'angle droit; et *angle obtus* celui qui est plus grand que l'angle droit. Ainsi, dans la Fig. 5, CAB est un angle aigu, CAD est un angle obtus.

12. Toute surface limitée dans son étendue est terminée par des lignes qui l'entourent et la circonscrivent. Ces lignes,

qu'on appelle les *côtés* de la figure, peuvent être droites ou courbes, ou en partie droites et en partie courbes. Dans le premier cas, la figure s'appelle une *figure rectiligne*, ou un *polygone* rectiligne ; dans le second, figure ou polygone *curviligne ;* dans le troisieme, figure ou polygone *mixtiligne.*

La mesure des polygones rectilignes est l'un des objets de la géométrie élémentaire : parmi les polygones curvilignes, le *cercle*, que nous définirons tout-à-l'heure, est le seul dont elle considere les propriétés.

13. Les polygones rectilignes ont différents noms, selon le nombre de leurs côtés. On appelle *triangle* (Fig. 7, 8, 9) celui qui en a trois ; *quadrilatere* (Fig. 13) celui qui en a quatre ; *pentagone* (Fig. 14) celui qui en a cinq ; *exagone* (Fig. 15) celui qui en a six ; *eptagone*, celui qui en a sept ; *octogone*, celui qui en a huit ; etc.

14. On distingue six especes de triangles : trois par rapport aux côtés, et trois par rapport aux angles.

1°. Par rapport aux côtés, on appelle triangle *équilatéral* celui ABC (Fig. 7), qui a ses trois côtés AB, BC, CA, égaux entre eux ; triangle *isoscele*, celui ABC (Fig. 8), qui a seulement deux côtés BA, BC, égaux ; triangle *scalene*, celui ABC (Fig. 9), qui a ses trois côtés inégaux.

2°. Par rapport aux angles, on appelle triangle *rectangle* celui ABC (Fig. 10), qui a un angle droit B ; triangle *obtusangle*, celui ABC (Fig. 11), qui a un angle obtus B ; triangle *acutangle*, celui ABC (Fig. 12), qui a ses trois angles aigus.

Nous démontrerons dans la suite rigoureusement (ce qui est d'ailleurs évident aux yeux), qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus, ou qu'un seul angle droit, mais que ses trois angles peuvent être aigus.

15. En désignant un triangle par les trois lettres placées aux sommets de ses trois angles, comme nous venons de le faire ; si le triangle est isoscele (Fig. 8), l'usage est de faire occuper le milieu, dans l'ordre de dénomination, à l'angle

B, qui comprend les deux côtés égaux BA, BC, ou de désigner le triangle par ABC; si le triangle est rectangle (Fig. 10), ou obtusangle (Fig. 11), on fait occuper le milieu à l'angle droit, ou à l'angle obtus, c'est-à-dire qu'on écrit ou prononce ABC. Mais tout cela est arbitraire, quant au fond. On ne suit aucun ordre fixe dans la désignation des autres especes de triangles.

16. La dénomination de *côtés* est commune pour les trois lignes qui forment le contour d'un triangle, quelle que soit d'ailleurs l'espece de ce triangle; mais, dans le triangle rectangle ABC (Fig. 11), on affecte spécialement le nom d'*hypothénuse* au côté BC opposé à l'angle droit B.

17. On appelle en général *base* d'un triangle le côté sur lequel on imagine qu'il s'appuie. Mais il faut bien se garder de joindre à cette idée celle d'une position essentiellement horizontale. Il n'en est pas ici comme de l'état physique et habituel des corps. Dans cet état, et dans le langage ordinaire, on entend par base d'un objet ce qui en porte la pesanteur, et alors cette base est nécessairement horizontale. Mais dans la géométrie, où l'on considere seulement l'étendue suivant ses trois dimensions, abstraction faite de la pesanteur et de toutes les autres qualités physiques des objets, la base d'un triangle peut avoir une position quelconque dans l'espace, c'est-à-dire, être horizontale ou inclinée.

Lorsque le triangle est isoscele (Fig. 8), on prend ordinairement pour base le côté AC opposé à l'angle B, qui est compris entre les côtés égaux BA, BC; de même, dans le triangle rectangle (Fig. 10), ou obtusangle (Fig. 11), on prend le plus souvent pour base le côté AC, opposé à l'angle droit ou obtus B. Mais toutes ces acceptions sont de volonté, ou de convenance; et les conditions d'un problème demandent quelquefois que l'on prenne pour base l'un des côtés égaux du triangle isoscele, ou l'un des côtés adjacents à l'angle droit, ou à l'angle obtus, du triangle rectangle ou obtusangles

Quand on a une fois fixé la base d'un triangle, la pointe de l'angle qui lui est opposé se nomme le *sommet* du triangle.

Tout ce qu'on vient de dire pour les triangles s'applique également aux autres figures, et aux solides.

18. Un polygone ABCDEF (Fig. 15), d'un nombre quelconque de côtés, qui a tous ses côtés égaux, et tous ses angles égaux, est appelé *régulier*. Les autres especes de polygones sont *irréguliers*.

19. Une droite AD (Fig. 13, 14, 15), menée d'un angle d'un polygone à un autre angle, s'appelle en général *diagonale*. Cette dénomination est principalement usitée pour le quadrilatere.

20. Le *cercle* est une figure terminée par une ligne courbe ABOD (Fig. 16), qu'on appelle *circonférence*, dont tous les points sont également éloignés d'un point intérieur C, qui est appelé le *centre*.

On peut regarder le cercle comme produit par le mouvement d'une droite CA, qui tourne autour de l'extrémité C, et qui porte un style fixé en A, à une distance toujours constante du centre C, lequel décrit la circonférence ABOD. C'est d'après cette idée qu'on trace le cercle sur le papier, au moyen de l'instrument nommé *compas*. Pour décrire la circonférence d'un cercle sur le terrain, au lieu du compas, on se sert d'un cordeau bien tendu, attaché par l'un de ses bouts à un piquet fixe, et garni, à l'autre bout, d'un piquet qui tourne sur le terrain, et qui y marque la circonférence.

21. On appelle *rayon*, toute droite CA menée du centre à la circonférence, et *diametre*, toute droite DB, qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre à la circonférence. On voit immédiatement par la génération du cercle que tous les rayons sont égaux. Tous les diametres sont aussi égaux, puisque chacun d'eux est la somme de deux rayons.

22. Une droite MN, qui se termine de part et d'autre à la circonférence, sans passer par le centre, s'appelle une *corde;* les portions de circonférence MON, MAN, qui répondent à la corde MN, s'appellent des *arcs*.

23. Il y a, parmi les corps ou solides, une variété infinie, à raison des différentes figures et des différentes positions que peuvent avoir les faces qui les terminent ou les enveloppent : mais tous les solides dont la géométrie élémentaire s'occupe se réduisent à trois, qui sont le *prisme*, la *pyramide*, et la *sphere*. Nous ferons connoître ci-dessous, en détail, ces trois especes de corps, lorsque nous examinerons leurs propriétés.

24. Je diviserai ce traité en quatre parties. La premiere aura pour objet les lignes; la seconde, les surfaces; la troisieme, les solides; la quatrieme, nommée *trigonométrie*, la mesure des angles et des côtés d'un triangle. Commençons par mettre en avant quelques *axiômes*, et quelques *demandes* ou suppositions d'opérations qu'on ne peut pas refuser d'accorder.

AXIÔMES.

25. I. *Un tout est égal à la somme de toutes ses parties, et il est plus grand que chacune d'elles en particulier.*

II. *Deux quantités qui sont égales, ou semblables, chacune à une troisieme quantité, sont égales, ou semblables, entre elles.*

III. *Si à des grandeurs égales on ajoute une même grandeur, ou des grandeurs égales, les sommes qu'on formera par ces additions seront égales.*

IV. *Si de grandeurs égales on retranche une même grandeur, ou des grandeurs égales, les restes seront égaux.*

V. *Si à deux quantités inégales on ajoute une même quantité, ou deux quantités égales, les sommes seront inégales, et la plus grande somme sera celle qui contiendra la plus grande des deux quantités inégales.*

VI. *Si de deux quantités inégales on retranche une même quantité, ou deux quantités égales, les restes seront inégaux, et le plus grand reste sera du côté de la plus grande des deux quantités inégales.*

VII. *Deux lignes, deux superficies sont égales, lorsqu'étant appliquées l'une sur l'autre, elles se conviennent ou se couvrent parfaitement.* De même *deux angles sont égaux, si, le sommet de l'un étant appliqué sur le sommet de l'autre, les côtés du premier tombent sur les côtés du second, chacun sur chacun.*

Cet axiôme est ce qu'on appelle le *principe de superposition :* nous en ferons un fréquent usage.

VIII. *Tous les angles droits sont égaux entre eux.*

Ainsi la somme de deux angles droits est égale à la somme de deux autres angles droits ; le double d'un angle droit est égal au double d'un autre angle droit ; et, en général, les multiples semblables de deux angles droits sont égaux entre eux.

DEMANDES.

26. On demande

I. *Qu'on puisse mener une ligne droite d'un point à tel autre point qu'on voudra.*

II. *Qu'on puisse prolonger aussi loin qu'on voudra une ligne proposée, ou imaginer que cette ligne est prolongée.*

III. *Qu'il soit permis de décrire un cercle de tel centre et de tel rayon qu'on voudra, ou d'imaginer que ce cercle est décrit.*

IV. *Qu'on puisse tirer une ligne droite égale à une autre ; imaginer qu'un angle est égal à un autre angle ; qu'une ligne droite est partagée en un certain nombre de parties égales ; qu'une ligne droite est perpendiculaire à une autre.* Sauf à donner en son lieu la maniere de faire un angle égal à un autre angle, de partager une ligne droite en parties égales, et de mener une perpendiculaire à une autre ligne.

PREMIERE PARTIE.

DES LIGNES.

27. Toutes les relations que des lignes peuvent avoir entre elles consistent, ou dans le rapport de grandeur de ces lignes, ou dans la position qu'elles ont, soit les unes à l'égard des autres, soit à l'égard du cercle. Le développement de ces relations et des conséquences ou propriétés particulieres qui en résultent, est l'objet de cette premiere partie.

CHAPITRE PREMIER.

Du rapport de grandeur des lignes.

28. On mesure et on compare ensemble les longueurs des lignes, au moyen d'une mesure commune, ou *étalon*, qui forme l'unité, et qui étant porté successivement sur toutes les lignes fait connoître leurs rapports de longueur. Par exemple, voulez-vous mesurer la distance de deux clochers A et B (Fig. 17), situés dans une plaine? Prenez à volonté pour unité une certaine mesure, telle que le metre: portez successivement cette mesure tout le long de la droite AB, qui est supposée joindre les deux clochers, en allant de l'un à l'autre; cette ligne sera composée d'autant de metres qu'il aura fallu répéter de fois l'unité pour épuiser cette même ligne. Si ce nombre de fois est 458, vous conclurez que les deux clochers sont distants l'un de l'autre de 458 metres; si le nombre de fois est 549, la distance sera de 549 metres; etc.

Il peut arriver que le metre ne soit pas contenu un nombre juste de fois dans l'intervalle AB: alors la derniere division est une fraction du metre.

29. Les lignes mesurées sur le terrain sont ordinairement

trop longues pour pouvoir être rapportées sur le papier dans leur grandeur naturelle ; on est donc obligé de les réduire, et de les exprimer par d'autres lignes plus petites ; c'est à quoi on parvient par la construction d'une échelle de rapport. Cette échelle est une ligne EF qu'on trace sur le papier, pour représenter l'unité ou un certain multiple de l'unité dont on s'est servi sur le terrain : elle doit donc être assez petite pour qu'en la répétant autant de fois qu'il est nécessaire pour former les lignes qu'on a dessein de représenter ou de rapporter sur le papier, les lignes de représentation puissent être comprises dans la feuille de papier sur laquelle tout le tracé doit être exécuté.

L'échelle EF étant une fois fixée, on la subdivise en plusieurs parties égales pour représenter les mesures plus petites. Par exemple, si EF représente un intervalle de 100 metres, on partagera cette ligne en dix parties égales F*f*, *fg*, *gh*, *etc.*, pour représenter des décimetres ; et si l'on veut pousser les subdivisions plus loin, on partagera l'une des parties F*f* en dix parties égales, ou seulement en quatre parties égales, ou cinq parties égales, etc ; par là, on aura des parties de l'échelle pour représenter sur le papier les parties des lignes mesurées sur le terrain.

Quant aux longueurs plus grandes que l'unité, pour abréger leur tracé sur le papier, on commence à former, au moyen de l'échelle EF, d'autres échelles AK plus grandes, par exemple, doubles, triples, quadruples, etc., dont on fait ensuite le même usage que de l'échelle fondamentale. Si la distance qu'on veut représenter par le moyen de l'échelle auxiliaire AK ne contient pas un nombre juste de fois la longueur que AK représente, on supplée *au défaut*, ou *à l'excès*, par l'échelle EF et ses parties.

CHAPITRE II.

Propriétés de la rencontre de deux lignes droites.

30. Théorème I. La *somme de deux angles de suite vaut toujours deux angles droits.*

En effet, 1°. Si (Fig. 18) la droite DC tombe perpendiculairement sur la droite AB, les deux angles de suite DCA, DCB seront droits, et par conséquent leur somme vaut deux angles droits.

2°. Si une droite EC tombe obliquement sur AB, il est clair qu'en imaginant la droite CD perpendiculaire en C sur AB (Dem. IV), la somme des deux angles de suite ECA, ECB, vaudra la somme des deux angles droits DCA, DCB; car l'angle obtus ECA surpasse l'angle droit DCA du même angle ECD, dont l'angle droit DCB surpasse l'angle aigu ECB. Donc, en général, la somme de deux angles de suite vaut deux angles droits.

31. *Corollaire I.* Lorsque deux lignes AC, CF (Fig. 19) ne sont pas une ligne droite, ou qu'elles forment une ligne brisée en C, la somme des deux angles ECA, ECF, qui ont leurs sommets au point C, et le côté commun EC, vaut moins ou plus que deux angles droits; car, en prolongeant AC vers B, la somme des deux angles ACE, ECB, vaut deux angles droits, et par conséquent la somme des deux angles ACE, ECF, vaut moins ou plus que deux angles droits, puisque CF ne tombe pas sur CB.

Et réciproquement, si la somme des deux angles ECA, ECF, vaut moins ou plus que deux angles droits, la ligne ACF sera brisée en C, puisque CF tombera évidemment en dedans ou en dehors de l'angle ECB.

On voit par-là que, si les deux angles ECA, ECF, valoient exactement deux angles droits, il n'y auroit

point de brisure en C, et que A C F formeroit une ligne droite.

32. *Corollaire II.* Si à un même point C et d'un même côté de la droite A B (Fig. 20) on mene un nombre quelconque de lignes G C, E C, F C, la somme de tous les angles A C G, G C E, E C F, F C B, vaut deux angles droits : car il est évident que la somme de tous ces angles est la même chose que la somme des deux angles A C G, G C B; ce qui ramene ce cas à celui de l'article 30.

De là et de l'article précédent il suit que, si la ligne A B étoit brisée en C, la somme des angles A C G, G C E, E C F, F C B, vaudroit moins ou plus que deux angles droits ; et réciproquement, si la somme de ces angles valoit moins ou plus que deux angles droits, la ligne A B seroit brisée en C.

33. *Corollaire III.* Les mêmes raisonnements et les mêmes conclusions ont lieu à l'égard des angles B C K, K C I, I C H, H C A, en nombre quelconque, placés de l'autre côté de A B.

Des deux cas il suit que, si l'on forme autour d'un point C tant d'angles qu'on voudra, la somme de tous ces angles vaudra quatre angles droits, puisqu'en menant une droite A C B, on a de part et d'autre deux sommes d'angles, lesquelles valent chacune deux angles droits.

34. Théorême II. *Deux lignes* A B, C D (Fig. 21), *qui se coupent, forment autour du point d'intersection* E *quatre angles, tels que les opposés au sommet sont égaux deux à deux; c'est-à-dire que l'angle* A E C *est égal à l'angle* D E B, *et que l'angle* A E D *est égal à l'angle* B E C.

1°. C D étant une ligne droite, la somme des deux angles A E C, A E D, vaut deux angles droits (30) : de même, A B étant une ligne droite, la somme des deux angles A E D, D E B, vaut deux angles droits. Donc on aura (Ax. VIII) *ang.* A E C + *ang.* A E D = *ang.* A E D + *ang.* D E B. Re-

Nous allons tirer de ce principe la solution des trois problèmes suivants.

41. Problème I. *Mener une ligne qui soit perpendiculaire sur le milieu d'une droite donnée* AB (Fig. 25).

Des points A et B, avec un même rayon arbitraire, mais plus grand que la moitié de AB, décrivez deux arcs de cercle MO, PQ, qui se coupent en F ; pareillement décrivez des mêmes points, avec un même rayon arbitraire, toujours plus grand que la moitié de AB, deux autres arcs *mo*, *pq*, qui se coupent en *f* ; menez par les points F et *f* la droite CD : je dis que cette ligne sera perpendiculaire sur le milieu de AB. En effet on a FA=FB, et *f*A=*f*B. Donc le point F est également éloigné des points A et B, et le point *f* est également éloigné des mêmes points. Donc les deux points F et *f* sont placés l'un et l'autre sur la perpendiculaire au milieu de AB.

La même méthode sert à diviser une ligne droite en deux parties égales.

42. Problème II. *Par un point* E *donné sur une ligne* KH (Fig. 26), *élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Du point E comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez la demi-circonférence AZB, qui coupe KH aux points A et B, et qui donne EB = EA ; ensuite des points A et B, avec un même rayon arbitraire, plus grand que EB ou EA, décrivez deux arcs de cercle MO, PQ, qui se coupent en F ; menez, par les points F et E, la droite CD ; elle sera perpendiculaire en E à la droite AB ou KH (40), puisque EB=EA, et FB=FA.

43. Problème. III. *D'un point* F, *situé hors d'une ligne* KH (Fig. 27), *abaisser une perpendiculaire à cette ligne.*

Du point F, comme centre, avec le rayon FA ou FB, décrivez l'arc AZB, qui coupe aux points A et B la droite KH, prolongée lorsqu'il est nécessaire. De ces deux

points, comme centres, avec un même rayon arbitraire, plus grand que la moitié de AB, décrivez deux arcs de cercle *m o*, *p q*, qui se coupent en *f*; menez par les points F et *f* la droite CD : elle sera perpendiculaire à KH, puisqu'elle passe par deux points, chacun également éloigné des points A et B.

44. Lemme. *Si d'un point* D (Fig. 28) *pris au dedans d'un triangle, on mene aux extrémités de l'un* AB *de ses côtés les droites* DA, DB, *la somme de ces deux lignes sera moindre que la somme des deux autres côtés* CA, CB, *du triangle, c'est-à-dire qu'on aura* DA + DB < CA + CB.

Cela est évident par soi-même, puisque la figure ADB est contenue en dedans de la figure ACB; mais si on en veut une démonstration en forme, la voici.

Prolongez AD jusques en E; on aura (5),

1°. BD < EB + ED; ajoutant de part et d'autre DA, on aura BD + DA < EB + EA. 2°. EA < CA + CE : ajoutant de part et d'autre EB; on aura EA + EB < CA + CB. Donc, *a fortiori*, BD + DA < CA + CB.

45. Théorême VI. *De toutes les lignes qu'on peut mener d'un point quelconque* F (Fig. 29) *à une droite* KH, *la plus courte est la perpendiculaire* FE; *et de deux obliques* FA, FK, *qui s'éloignent inégalement de la perpendiculaire, la plus courte est celle* FA *qui s'en éloigne le moins.*

Prolongez la perpendiculaire FE d'une quantité ED égale à elle-même, et tirez les droites AD, KD : la droite FD étant perpendiculaire à KH, réciproquement KH est perpendiculaire à FD (35). Donc, à cause de ED = EF, on aura (37) AD = AF, KD = KF. Or, FD < FA + AD; et (44) FA + AD < FK + KD. Donc, en prenant les moitiés, on aura FE < FA, FA < FK : d'où l'on voit, 1°. que la perpendiculaire FE est plus courte que chacune des obliques FA, FK; 2°. que, de ces

côté BC; il est clair que les deux arcs de cercle décrits avec les rayons égaux BA, ED, se confondront, et que les deux arcs décrits avec les rayons égaux CA, FD, se confondront. Donc les deux points d'intersection A et D n'en formeront qu'un seul, et le triangle DEF s'appliquera exactement sur le triangle ABC; donc ces deux triangles sont parfaitement égaux.

52. Théorême IV. *Les deux triangles quelconques* ABC, DEF (Fig. 32 et 33) *seront parfaitement égaux si* DE = AB, DF = AC, *l'angle* E = *l'angle* B, *et que de plus les deux angles* F *et* C *soient de la même espece, c'est-à-dire, tous deux aigus, ou tous deux obtus, ou tous deux droits.*

Si on applique le côté ED sur le côté BA, de maniere que le point E tombe sur le point B, le point D tombera sur le point A, à cause de DE = AB; et EF aura même direction que BC, à cause des angles égaux E et B. Le point E pouvant être regardé comme l'intersection de EF avec un arc de cercle décrit du point D pour centre, et ayant DF pour rayon; si du point D, confondu maintenant avec le point A, et du rayon AC ou DF, on décrit l'arc de cercle CRK qui coupe BC en un second point K, et qu'on tire AK; le triangle DEF ne pourra être que le triangle ABC, ou le triangle ABK. Or cette seconde supposition ne peut pas avoir lieu en général : car le triangle ACK étant isoscele, et l'angle F étant de même espece que l'angle C, et conséquemment aussi que l'angle AKC; cet angle F ne peut pas être l'angle AKB, à moins que DF et AC ne fussent perpendiculaires à EF et à BC, auquel cas les points C et K se confondroient. Donc, en général, le triangle DEF se confond avec le triangle ABC, et par conséquent ces deux triangles sont parfaitement égaux.

53. *Corollaire.* Il suit de là, 1°. que deux triangles rectangles qui ont des hypothénuses égales, et un angle aigu égal à un angle aigu, sont parfaitement égaux. Tels sont (en abaissant des angles A et D les perpendiculaires AO, AH sur les côtés opposés) les deux triangles rectangles AOB, DHE,

qui ont les hypothénuses AB, DE, égales, les angles B et E égaux, et les deux angles droits AOB, DHE, de la même espece.

2°. Si l'on considere le triangle isoscele KAC (Fig. 32), on verra que, dans ces sortes de triangles et dans les triangles équilatéraux, la perpendiculaire AO, abaissée de l'angle A sur la base, partage le triangle en deux triangles rectangles AOC, AOK, parfaitement égaux, puisque ces deux triangles, appliqués l'un sur l'autre, coïncideroient parfaitement.

54. Théorême V. *Deux polygones quelconques, composés d'un même nombre de triangles qui sont dans l'un des cas précédents, et semblablement disposés, sont parfaitement égaux.*

Car, si l'on applique ces deux polygones l'un sur l'autre, il est évident qu'on pourra faire coïncider les parties, et que par conséquent les touts coïncideront semblablement.

CHAPITRE IV.

Des lignes paralleles.

55. Si à tous les points C, C, C, C, d'une droite AB (Fig. 34) on éleve sur cette ligne des perpendiculaires égales CD, CD, CD, CD; qu'ensuite de chaque point D au point voisin D on mene une petite ligne droite : l'assemblage de toutes ces petites lignes formera une ligne continue que je nomme *parallele* à AB.

56. *Corollaire.* Il suit de cette définition, que la ligne D D D D est *droite :* car, puisque tous les points D sont également éloignés de la droite AB, il est clair que la ligne DDDD ne peut, en aucun endroit de son cours, former de concavité ni de convexité vers AB, et que par conséquent tous ses points sont placés sur une seule et même direction rectiligne EF. Et, en effet, si l'on

conçoit que, la droite AB demeurant immobile, toutes les droites égales DC, DC, DC, DC, auxquelles on n'a attribué aucune longueur déterminée, viennent à diminuer continuellement chacune de la même quantité : les points D, en s'approchant des points C, conserveront toujours entre eux, et par rapport à AB, la même situation. Or, lorsque les lignes DC deviennent tout-à-fait nulles, les points D se confondent avec les points C, et la ligne entiere EF se confond avec la droite AB; ce qui ne pourroit pas arriver si EF n'étoit pas une ligne droite.

57. Théorême I. *La droite* EF (Fig. 35) *étant supposée parallele à la droite* AB, *si d'un point quelconque* C, *pris sur* AB, *on éleve à cette ligne la perpendiculaire* CD, *qui rencontre* EF *en* D : *cette ligne* CD *sera aussi perpendiculaire à* EF.

Prenez arbitrairement, de part et d'autre du point C, les droites égales CK, CG; par les points K, G, élevez sur AB les perpendiculaires KL, GH; et tirez les diagonales CL, CH. La ligne EF étant parallele à AB, on aura (55), KL = GH. Donc les deux triangles rectangles CKL, CGH, sont parfaitement égaux (49), puisque CK = CG, KL = GH, et angle K = angle G. Ainsi l'angle KCL = l'angle GCH, et CL = CH. Retranchant les angles KCL, GCH des angles droits égaux KCD, GCD, restera l'angle LCD = l'angle HCD; donc (49) les deux triangles CDL, CDH sont parfaitement égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc les deux angles de suite CDL, CDH, sont égaux; et par conséquent chacun d'eux est droit, ou, ce qui revient au même, CD est perpendiculaire à EF.

58. *Corollaire I.* Donc la ligne EF (Fig. 34) étant supposée parallele à AB, on peut dire aussi que AB est réciproquement parallele à EF, puisque les lignes égales CD,

CD, CD, CD, regardées comme perpendiculaires à AB, sont réciproquement perpendiculaires à EF.

59. *Corollaire II.* Donc deux droites paralleles AB, EF, sont par-tout également distantes l'une de l'autre, comme étant perpendiculaires en chacun de leurs points à une suite de lignes droites égales CD, CD, CD, CD, qui expriment chacune (46) la distance du point D à la droite AB, ou la distance du point C à la droite EF.

60. *Corollaire III.* De là suit la maniere de mener (Fig. 36), par un point D, donné ou pris à volonté, une parallele à la droite AB. Du point D, abaissez (43) la droite DC perpendiculaire à AB; et de ce même point élevez (42) DF perpendiculaire à DC; cette droite DF sera parallele à AB.

61. *Corollaire IV.* Si, ayant mené les perpendiculaires CD, MN, aux deux paralleles AB, EF, on prend d'un même côté les parties CR, MO, égales entre elles, et qu'on mene les obliques RD, ON, ces obliques seront égales, et les parties RO, DN, des lignes AB, EF, seront aussi égales; car, 1°. les deux triangles rectangles DCR, NMO, sont parfaitement égaux (49), comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. 2°. Si on mene la droite DM, les deux triangles rectangles DCM, DNM, qui ont la même hypothénuse, et le côté DC = NM, sont parfaitement égaux (53); d'où résulte CM = DN; ôtant OM de CM, et ajoutant CR qui est égale à OM, on aura RO = CM = DN.

62. Théorême II. *Si les droites paralleles* AB, EF (Fig. 37) *sont coupées par une droite* KL : *les angles* HDB, EHD (qu'on appelle angles alternes internes) *seront égaux.*

Car si des points H et D, on mene aux deux paralleles les perpendiculaires HO, DG; les deux triangles rectan-

gles HOD, DGH, qui ont la même hypothénuse, et les côtés HO, DG, égaux (59), sont parfaitement égaux (52); donc l'angle HDO=l'angle DHG.

63. *Corollaire.* Il suit de là, 1°. que les angles HDB, KHF (qu'on appelle *angles internes externes d'un même côté*) sont égaux, puisque l'angle KHF est égal (34) à son opposé par le sommet EHD, qui vient d'être démontré égal à HDB.

2°. Que les angles KHF, ADL (qu'on appelle *angles alternes externes*) sont égaux, puisqu'ils sont opposés par le sommet à des angles égaux.

3°. Que les angles *alternes internes* FHD, ADH, sont égaux, puisqu'étant ajoutés aux angles égaux KHF, ADL, on a deux sommes égales (30). Par la même raison, les angles *alternes externes* KHE, BDL, sont égaux.

4°. Que la somme des deux angles FHD, BDH (qu'on appelle *angles internes d'un même côté*) vaut deux angles droits, puisque la somme des deux angles de suite FHK, FHD, vaut deux angles droits, et que l'angle FHK est égal à l'angle HDB. Par une raison semblable, la somme des deux angles *externes d'un même côté*, FHK, BDL, vaut deux angles droits.

64. Théorême III. *Réciproquement, si deux droites* AB, EF (Fig. 38) *sont coupées par une droite* KL, *de maniere que les angles alternes internes* HDB, EHD, *soient égaux; ces deux lignes* AB, EF, *seront paralleles.*

Car si on prétend que EF ne sera pas parallele à AB, je menerai, par le point H, la droite *ef* parallele à AB: alors, par le Théorême précédent, l'angle *e*HD sera égal à l'angle HDB; donc l'angle *e*HD sera égal à l'angle EHD; ce qui ne peut pas arriver, à moins que *ef* ne tombe sur EF, ou que EF ne soit parallele à AB.

65. *Corollaire.* Les deux lignes AB, EF, sont aussi paralleles, 1°. si les angles HDB, KHF, sont égaux; car

l'angle KHF étant égal à l'angle EHD (34), les deux angles EHD, HDB, seront égaux.

2°. Si les angles KHF, ADL, sont égaux; car alors les angles EHD, HDB, qui leur sont opposés par le sommet, seront égaux.

3°. Si les angles FHD, ADH, sont égaux, ou si les angles KHE, BDL, sont égaux; car de l'une ou de l'autre supposition il résulte que l'angle EHD = l'angle HDB.

4°. Si la somme des deux angles FHD, BDH, ou si la somme des deux angles FHK, BDL, vaut deux angles droits; car on trouvera facilement qu'en conséquence de l'une ou de l'autre supposition les angles EHD, HDB, seront égaux.

CHAPITRE V.

Valeur des angles d'un triangle, ou d'un polygone; dépendance générale et mutuelle des angles et des côtés, dans un même triangle, ou dans deux triangles égaux en partie; etc.

66. Théorême I. LA *somme des trois angles d'un triangle quelconque* BAC (Fig. 39) *vaut toujours deux angles droits.*

Menez, par le sommet A de l'un des angles, la droite MAN parallele au côté opposé BC: les deux angles alternes internes ABC, BAM, sont égaux, et de même les deux angles ACB, CAN, seront égaux (62). Ainsi, la somme des trois angles du triangle BAC vaut la somme des trois angles BAM, BAC, CAN. Or, la somme de ces trois derniers angles vaut deux angles droits (32). Donc aussi la somme des trois angles du triangle vaut deux angles droits.

67. *Corollaire I.* Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle

droit, et, à plus forte raison, qu'un seul angle obtus ; mais il peut avoir les trois angles aigus.

Par-là, on a la démonstration rigoureuse de l'assertion que nous avons mise en avant (14).

68. *Corollaire II.* Si la somme de deux angles d'un triangle est égale à la somme de deux angles d'un autre triangle, le troisieme angle du premier triangle sera égal au troisieme angle du second : car, retranchant les deux sommes proposées, chacune de deux angles droits, les deux angles restants seront nécessairement égaux.

Ainsi, pour conclure que deux triangles ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, il suffira de reconnoître que deux angles de l'un de ces triangles sont égaux chacun à chacun de deux angles de l'autre triangle.

69. *Corollaire III.* Si l'on prolonge l'un BC des côtés d'un triangle BAC, l'angle ACD (qu'on appelle *angle extérieur*) sera égal à la somme des deux angles CBA, CAB (qu'on appelle *angles intérieurs*) : car la somme des deux angles ACD, ACB, et la somme des trois angles CBA, CAB, ACB, du triangle, sont égales entre elles, comme ayant pour valeur commune deux angles droits. Donc, en retranchant de ces deux sommes l'angle ACB, restera l'angle ACD égal à la somme des deux angles CBA, CAB.

70. *Corollaire IV.* Si d'un point M placé sur l'un AC des côtés d'un triangle BAC (Fig. 40), on mene à l'extrémité du côté BC la droite MB, l'angle BMC sera plus grand que l'angle BAM ; car l'angle BMC, étant extérieur au triangle BAM, vaut la somme des deux angles BAM, ABM, et par conséquent surpasse l'angle BAM de la valeur de l'angle ABM.

A plus forte raison, si d'un point O, pris au-dedans du triangle BAC, on mene les droites OB, OC, aux extrémités du côté BC, l'angle BOC sera plus grand que l'angle BAC,

puisque l'angle BOC est plus grand que l'angle BMC, et que l'angle BMC est plus grand que l'angle BAC.

71. Théorême II. *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone quelconque vaut toujours autant de fois deux angles droits, moins quatre angles droits, que le polygone a de côtés.*

1°. Soit (Fig. 41) un polygone quelconque ABCDEF, dont tous les angles sont saillants : menez de l'un A des angles les diagonales AC, AD, AE; vous formerez par-là autant de triangles, moins deux, que le polygone a de côtés. Or la somme des angles intérieurs du polygone vaut la somme de tous les angles de ces triangles. Donc elle vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre angles droits, que le polygone a de côtés, puisque la somme des trois angles de chaque triangle en particulier vaut deux angles droits.

2°. Lorsque le polygone a des angles rentrants, tels que C (Fig. 42), il faut tirer la droite CD; et alors, dans le nouveau polygone ABDEF, dont tous les angles sont saillants, et qui a un côté de moins que le premier ABCDEF, la somme des angles intérieurs $=(n-1)\times 2D-4D$, en nommant n le nombre des côtés du polygone proposé, D la valeur de l'angle droit. Or, si l'on prend pour l'angle intérieur C de ce même polygone la somme des deux angles ACB, ACD, on verra que, pour avoir la somme de tous ses angles intérieurs, il faudra ajouter à l'expression $(n-1)\times 2D-4D$, la somme des deux angles ACB, ACD, et en retrancher la somme des deux angles CBD, CDB: et comme en prolongeant AC jusques en K, on a *ang.* ACB = *ang.* CBD + *ang.* CKB, et *ang.* ACD = *ang.* CDB + *ang.* CKD, on aura *ang.* ACB + *ang.* ACD — *ang.* CBD — *ang.* CDB = *ang.* CKB + *ang.* CKD = 2D. Donc la somme des angles intérieurs du polygone proposé ABCDEF $=(n-1)\times 2D-4D+2D=n\times 2D-4D$; ce qui est encore conforme à l'énoncé général du théorême.

Si le polygone avoit deux angles rentrants, on formeroit successivement deux polygones saillants; si trois angles ren-

trants, trois polygones saillants; ainsi de suite; et on trouvera toujours en général que le théoréme a lieu.

72. *Corollaire I.* En rapprochant le théorême I et le précédent, on voit,

1°. Que la somme des trois angles d'un triangle vaut 2 angles droits;

2°. Que la somme de tous les angles intérieurs d'un quadrilatere vaut 4 angles droits;

3°. Que la somme de tous les angles intérieurs d'un pentagone vaut 6 angles droits;

4°. Que la somme de tous les angles intérieurs d'un exagone vaut 8 angles droits;

5°. Que la somme de tous les angles intérieurs d'un eptagone vaut 10 angles droits;

Ainsi de suite.

Toutes ces sommes d'angles suivent la progression arithmétique $\div$ 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14, etc., dont le premier terme est 2, et la différence ou raison est aussi 2.

73. *Corollaire II.* La somme de tous les angles extérieurs BAM, CBN, DCO, etc. d'un polygone qui ne contient pas d'angles rentrants (Fig. 41), vaut toujours quatre angles droits; car chaque angle extérieur avec son intérieur vaut deux angles droits; et comme la somme de tous les angles intérieurs vaut autant de fois deux angles droits, moins quatre angles droits, que le polygone a de côtés, il est clair que la somme des angles extérieurs vaut toujours quatre angles droits.

Quant aux polygones qui ont des angles rentrants, la somme des angles extérieurs vaut toujours quatre angles droits, plus autant de fois deux angles droits que le polygone a d'angles rentrants. En effet, si l'on mene (Fig. 42) la droite BDH, on voit que la somme des angles extérieurs BAM, DBN, EDH, etc. du polygone ABDEF dont tous les angles sont saillants, vaut quatre angles droits. Or, pour avoir la somme des angles extérieurs du polygone proposé ABCDEF, qui a un angle rentrant, il faut ajouter aux premiers angles les trois angles

DBC, BCD, GDH ou CDB, lesquels valent deux angles droits. Et comme on prouvera la même chose pour tout autre angle rentrant, il s'ensuit que la somme, etc.

74. Théorême III. *Si dans un triangle* BAC (Fig. 43), *les angles* B *et* C *sont égaux, les côtés* AC, AB, *opposés à ces angles, seront aussi égaux.*

Et réciproquement, *de l'égalité des côtés* AC, AB, *suit l'égalité des angles qui leur sont opposés.*

Ce théorême est déja compris dans le n°. 2 de l'article 53; mais, comme il nous est nécessaire ici, je vais le développer et le démontrer un peu autrement.

De l'angle A, abaissez la perpendiculaire AO sur le côté opposé BC. Alors:

1°. les deux triangles rectangles AOB, AOC, auront les trois angles égaux, chacun à chacun, puisqu'outre les angles droits égaux AOB, AOC, les angles ABC, ACB sont égaux par hypothese. Ainsi ces deux triangles auront le côté commun AO adjacent à deux angles égaux. Donc ils seront parfaitement égaux (50); et le côté AC = le côté AB.

2°. Réciproquement, si l'on suppose AC = AB, l'angle B sera égal à l'angle C; car les deux triangles rectangles AOB, AOC, ayant le côté commun AO, et des hypothénuses égales AC, AB, sont parfaitement égaux (52); donc l'angle C = l'angle B.

75. *Corollaire I.* Il est évident que si les trois angles du triangle BAC étoient égaux, les trois côtés seroient aussi égaux : et réciproquement. Car, en comparant les angles, ou les côtés, deux à deux, on démontreroit l'égalité de deux côtés, ou de deux angles; d'où l'on concluroit de proche en proche l'égalité de tous les côtés, ou de tous les angles.

De là, en revenant aux définitions qu'on a données (14) du triangle *équilatéral* et du triangle *isoscele*, on voit qu'on peut aussi appeler triangle *équilatéral* celui qui a les trois angles égaux; et triangle *isoscele* celui qui a deux angles égaux, lesquels sont opposés à des côtés égaux.

76. *Corollaire II.* Deux triangles isosceles sont *équiangles*, c'est-à-dire, ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, lorsqu'ils ont seulement deux angles correspondants égaux, c'est-à-dire, ou l'angle du sommet égal à l'angle du sommet, ou l'un des angles de la base égal à l'un des angles de la base. Car 1°. lorsque l'angle du sommet est égal à l'angle du sommet, la somme des deux angles de la base est égale à la somme des deux angles de la base; et, comme dans chaque triangle, les angles de la base sont égaux, on voit que les trois angles du premier triangle seront égaux chacun à chacun des trois angles du second. 2°. Lorsqu'un angle de la base de l'un des triangles est égal à l'angle de la base de l'autre triangle, les deux autres angles des bases sont aussi égaux. Donc les deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun (68).

Il est inutile de faire observer que deux triangles équilatéraux sont toujours équiangles, puisque chacun des angles de ces deux triangles vaut le tiers de deux angles droits.

77. Théorème IV. *Dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle :* et réciproquement, *le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

Soit le triangle BAC (Fig. 44 et 45). Si, par exemple, l'angle C est plus grand que l'angle B, le côté AB sera plus grand que le côté AC : et réciproquement, si le côté AB est plus grand que le côté AC, l'angle C sera plus grand que l'angle B.

Pour le démontrer, abaissez de l'angle A sur le côté BC (prolongé, s'il est nécessaire) la perpendiculaire AO; prenez OD = OC, et tirez AD. Alors,

1°. Les deux triangles rectangles AOC, AOD, seront parfaitement égaux (49), comme ayant un angle égal, (savoir l'angle droit) compris entre côtés égaux chacun à chacun; et par conséquent l'angle ADO est égal à l'angle ACO. Ainsi, puisque la somme des trois angles du triangle AOD est égale à la somme des trois angles du triangle AOB,

et que les deux angles droits AOD, AOB, sont égaux, il s'en suit que si l'angle ACO ou ADO est > que l'angle ABO, l'angle DAO sera < que l'angle BAO; donc AB s'éloignera plus que AD de la perpendiculaire AO; et par conséquent (45), AB sera > AD ou AC.

2°. Réciproquement, si on a AB > AC ou AD, AB s'éloignera plus que AD de la perpendiculaire AO; donc l'angle BAO sera > l'angle DAO. D'où il suit que l'angle ADO ou ACO sera > l'angle ABC, la somme des trois angles du triangle AOD étant égale à la somme des trois angles du triangle AOB, et les deux angles droits AOD, AOB, étant égaux.

78. *Corollaire.* Puisque l'inégalité des angles emporte l'inégalité des côtés, il est clair qu'au lieu de dire (14) qu'un triangle est *scalene*, lorsqu'il a ses trois côtés inégaux, on peut dire aussi qu'un triangle est *scalene*, quand il a ses trois angles inégaux.

79. Théorême V. *Si deux triangles ont deux angles inégaux, compris entre côtés égaux chacun à chacun; le côté opposé au plus grand de ces deux angles sera plus grand que le côté opposé au plus petit.* Et réciproquement.

Il est évident que les deux triangles dont il s'agit peuvent toujours être représentés par les deux triangles BAC, BAD (Fig. 46) qui ont le côté commun AB, le côté AC=le côté AD, et les deux angles inégaux BAC, BAD. Or, si l'angle BAD est > l'angle BAC, le côté BD sera > le côté BC. Et réciproquement.

En effet, si vous menez la droite CD, vous aurez un triangle isoscele CAD, qui sera placé à côté du triangle BAC, à cause de l'angle BAD > l'angle BAC. Or, l'angle ACD est < l'angle BCD dont il fait partie; et de même, l'angle BDC est < l'angle ADC ou ACD. Ainsi l'angle BCD est > l'angle BDC. Donc, en regardant BD et BC, comme côtés du triangle BCD, on aura BD > BC (76).

Il est inutile d'ajouter que si les deux angles BAD, BAC étoient égaux, les points D et C se confondroient, et que

les deux triangles proposés seroient parfaitement égaux (49); de sorte qu'alors on auroit BC = BD.

Réciproquement, si BD est > BC, l'angle BAD sera > l'angle BAC; car, si l'on prétendoit que l'angle BAD peut être plus petit que l'angle BAC, ou que ces deux angles sont égaux (il n'y a pas d'autre combinaison possible, outre la proposée), il suivroit du cas précédent que BD seroit < ou = BC; ce qui est contraire à l'hypothese.

80. Théorême VI. *Si dans un quadrilatere* ABCD (Fig. 47), *les côtés opposés sont paralleles, les côtés opposés seront égaux.* Et réciproquement.

Menez la diagonale BD : les côtés AD, BC, étant parallèles, les angles alternes internes ADB, CBD, sont égaux (62); et de même, les côtés AB, DC, étant paralleles, les angles ABD, BDC, sont égaux. Donc (50), les deux triangles ABD, CBD, sont parfaitement égaux, comme ayant un côté BD commun ou égal, adjacent à deux angles égaux. Donc AD = BC, et AB = DC.

Réciproquement, si dans un quadrilatere, les côtés opposés sont égaux, ces côtés seront paralleles deux à deux. Car alors (51) les deux triangles ABD, CBD, sont parfaitement égaux, comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. Donc les angles ADB, CBD, sont égaux, et par conséquent les deux lignes AD, BC, sont paralleles (64); de même, les deux angles ABD, CBD, sont égaux, et par conséquent les lignes AB, CD, sont paralleles.

AVERTISSEMENT.

81. On appelle *parallélogramme* un quadrilatere qui a les côtés opposés paralleles. Et comme un tel quadrilatere a aussi les côtés opposés égaux, ainsi que nous venons de le voir, on peut dire également qu'un parallélogramme est un quadrilatere dont les côtés opposés sont égaux.

Il y a plusieurs especes de parallélogrammes. Si un pa-

rallélogramme, tel que celui de la Figure 47, a deux angles aigus, et deux angles obtus, il s'appelle *parallélogramme obliquangle*, ou simplement *parallélogramme*. Et lorsqu'un parallélogramme, ayant deux angles aigus et deux angles obtus, a ses quatre côtés égaux, il s'appelle lozange (Fig. 48).

Un parallélogramme dont les quatre angles sont droits s'appelle un *parallélogramme rectangle*, ou simplement un *rectangle* (Fig. 49). Si les quatre angles étant droits, les quatre côtés sont égaux, le rectangle prend le nom de *quarré* (Fig. 50).

Un quadrilatere (Fig. 51) qui a simplement deux côtés AD, BC, paralleles, s'appelle un *trapeze*.

CHAPITRE VI.

De la rencontre des lignes droites avec des lignes circulaires, et de la rencontre mutuelle des lignes circulaires.

82. Théorême I. DE *toutes les lignes qu'on peut mener* (Fig. 52, 53, 54), *d'un point* A *qui n'est pas le centre d'un cercle, à la circonférence : 1°. la plus longue est celle* AB *qui passe par le centre. 2°. Parmi celles* AD, AE, *qui ne passent pas par le centre, la plus longue* AD *est celle qui s'éloigne le moins de celle qui passe par le centre.* Et réciproquement.

Le point A peut être placé, ou sur la circonférence (Fig. 52), ou en dedans du cercle (Fig. 53), ou en dehors (Fig. 54). La démonstration est la même pour les trois Figures.

Menez les rayons CD, CE : 1°. vous aurez AB = AC + CB = AC + CD, à cause de CD = CB. Or, AC + CD > AD (5). Donc AB > AD. On prouvera de même que AB est > AE. Ainsi la droite AB, qui passe

par le centre, est plus longue que toute autre ligne AD, AE, qui n'y passe pas.

2°. On a CF + FD > CD, ou CF + FD > CE. Retranchant de part et d'autre CF, restera FD > FE: ajoutant de part et d'autre FA, on aura FD + FA, ou AD > FE + FA. Or, FE + FA > AE. Donc, à plus forte raison, AD > AE. De sorte que des deux droites AD, AE, qui ne passent pas par le centre, la plus longue est celle qui s'éloigne le moins de celle qui passe par le centre.

Réciproquement : 1°. si la droite AB étant supposée la plus longue de toutes celles qu'on peut mener d'un point A, qui n'est pas le centre d'un cercle, à la circonférence, ne passoit pas par le centre, il suivroit, du premier cas, que la plus longue de toutes les lignes qu'on peut mener du point A à la circonférence ne seroit pas celle qui passe par le centre, puisque ce seroit cette autre ligne qu'on supposeroit n'y pas passer ; ce qui implique contradiction.

2°. De même, si AD est > AE, la droite AD s'approchera plus que AE de AB qui passe par le centre ; autrement, de deux lignes qui s'éloignent inégalement de AB, la plus longue ne seroit pas celle qui s'éloigne le moins, mais ce seroit cette autre ligne qu'on supposeroit s'éloigner plus ; ce qui implique encore contradiction.

83 *Corollaire I.* D'un point A, qui n'est pas le centre du cercle, on ne peut pas mener à la circonférence plus de deux lignes égales ; car si on en pouvoit seulement mener trois, il faudroit que deux tombassent d'un même côté par rapport à celle qui passe par le centre ; or ces deux lignes ne pourroient pas être égales sans se confondre. Ainsi, en supposant que les droites AD, Ad, qui tombent de différents côtés par rapport à AB, s'éloignent également de AB, ces deux lignes sont égales, mais chacune sera plus grande que AE, à moins que le point E, ne tombe sur le point D, auquel cas AE ne différeroit pas de AD.

84. *Corollaire II.* Le point A étant supposé placé sur la circonférence (Fig. 52), AB est un diametre du cercle. Ce diametre est plus grand que chacune des cordes AD, AE ; et, des deux cordes qui soustendent chacune un arc moindre que la demi-circonférence, la plus longue est celle qui soustend le plus grand arc.

85. Théorème II. *De toutes les droites* AB, AD, AE, *qu'on peut mener d'un point* A (Fig. 55, 56), *qui n'est pas le centre d'un cercle, à la circonférence : 1°. la plus courte est celle* BA, *ou* AB, *dont le* PROLONGEMENT *passe par le centre. 2°. parmi les autres* AD, AE, *celle* AD *qui s'éloigne le moins de* AB *est la plus courte.* Et réciproquement.

Menez les rayons CD, CE : 1°. vous aurez (Fig. 55), CA + AD > CD, ou CA + AD > CB. Retranchant CA de part et d'autre, restera AD > AB. Et (Fig. 56), vous aurez AD + DC > AC. Retranchant d'une part DC, et de l'autre son égale CB, restera AD > AB. Ainsi dans l'une et l'autre Figure, AB est < AD. On démontrera de même que AB est < AE.

2°. On a (Fig. 55), CF + FE > CE, ou CF + FE > CD. Retranchant de part et d'autre CF, restera FE > FD. Ajoutant de part et d'autre FA, vous aurez FE + FA, ou AE > FD + FA. Or, FD + FA > AD. Donc, à plus forte raison, AE > AD. Dans la Figure 56, on a (44) AE + EC > AD + DC. Retranchant d'une part EC, et de l'autre son égale CD, restera AE > AD. Ainsi dans l'une et l'autre Figure, AD est plus courte que AE.

Réciproquement : 1°. si AB est moindre que AD, ou que AE, le prolongement de AB passera par le centre ; autrement la plus courte ligne ne seroit pas celle dont le prolongement passe par le centre, mais cette autre ligne dont on supposeroit que le prolongement n'y passeroit pas ; ce qui contrediroit la premiere partie du cas précédent.

2°. De même, si AD étant supposée < AE, s'éloignoit plus que AE, de AB, la ligne qui s'éloigne le moins ne

seroit pas la plus courte ; ce qui seroit en contradiction avec la seconde partie du cas précédent.

86. Théorême III. *Dans un même cercle, ou dans des cercles qui ont des rayons égaux, les arcs* AGD, MKN (Fig. 57), *qui sont égaux, ont des cordes égales* AD, MN.

Et réciproquement, *lorsque les cordes* AD, MN, *sont égales, les arcs* AGD, MKN, *qu'elles soustendent, sont égaux.*

1°. La circonférence ayant la même courbure dans toute son étendue, il est clair que les deux arcs égaux AGD, MKN, peuvent s'appliquer exactement l'un sur l'autre, et que le point A tombera sur le point M, le point D sur le point N. D'où il suit que les deux cordes AD, MN, se conviendront parfaitement, et sont par conséquent égales.

2°. Les cordes AD, MN, étant supposées égales, si on les applique l'une sur l'autre de maniere que le point A tombe sur le point M, le point D sur le point N ; les arcs AGD, MKN, dont les courbures sont les mêmes, se conviendront parfaitement, et sont par conséquent égaux.

On voit en même temps par-là que, si l'arc AGD étoit plus ou moins grand que l'arc MKN, la corde AD seroit plus ou moins grande que la corde MN ; et réciproquement. Car si on applique les deux arcs l'un sur l'autre, de maniere que le point A tombe sur le point M, le point D tombera en-deçà ou en-delà du point N ; d'où résulte l'inégalité réciproque des cordes et des arcs.

87. Théorême IV. *Si du centre* C *d'un cercle* (Fig. 58) *on abaisse la perpendiculaire* CO *sur la corde* AB, *elle divisera la corde* AB *et l'arc* AFB *chacun en deux parties égales.*

1°. Puisque la ligne CO est perpendiculaire à AB, et que le centre C, par où elle passe, est également éloi-

gné des points A et B, il s'ensuit (40) que cette ligne passe par le milieu de AB.

2°. La droite CO passe par le milieu F de l'arc AFB; car, étant perpendiculaire sur le milieu de AB, chacun de ses points (37) doit être également éloigné des points A et B : or, le point F est également éloigné des points A et B, puisque les arcs FMA, FNB, étant supposés égaux, les cordes FA, FB, sont égales. Donc le point F est placé sur la perpendiculaire CO.

88. *Corollaire I.* On voit par-là que le centre du cercle, le milieu de la corde, le milieu de l'arc, sont trois points toujours placés sur une même ligne qui est perpendiculaire à la corde : or deux points seulement suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite. Donc toute ligne qui passera par deux des trois points proposés passera nécessairement par le troisieme, et sera de plus perpendiculaire à la corde.

89. *Corollaire II.* Si on mene une seconde corde MN parallele à AB, les deux arcs MA, NB, compris entre ces deux cordes, seront égaux; car la droite CO, étant perpendiculaire à AB, sera aussi perpendiculaire à MN (57). Donc le centre C, le point E milieu de MN, le point F milieu de l'arc MFN, sont placés sur la perpendiculaire CO : or, puisqu'on a *arc* FMA = *arc* FNB, et *arc* FM = *arc* FN; si l'on retranche terme à terme la seconde égalité de la premiere, on aura *arc* MA = *arc* NB.

Réciproquement, si les deux arcs MA, NB, placés d'un même côté de AB, sont égaux, la corde MN sera parallele à AB. Car, menant CO perpendiculaire à AB, on aura *arc* FMA = *arc* FNB : retranchant terme à terme de cette équation l'équation *arc* MA = *arc* NB, on aura *arc* FM = *arc* FN. Donc (86) CO est aussi perpendiculaire à MN : or la ligne CO étant perpendiculaire à chacune des cordes AB, MN, réciproquement ces deux cordes lui sont perpendiculaires (35); donc (Ax. VIII) elles forment avec elle des angles internes externes d'un même côté égaux entre eux; donc (65) les deux lignes AB, MN, sont paralleles.

90. Problème. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés* A, B, D (Fig. 59).

Tirez les droites AB, BD; menez (41) ME perpendiculaire sur le milieu de AB, et NF perpendiculaire sur le milieu de BD; du point C, où ces deux perpendiculaires se coupent, décrivez avec le rayon CA une circonférence de cercle: je dis qu'elle passera aussi par les points B et D, et qu'elle sera par conséquent la circonférence demandée; car CE étant perpendiculaire sur le milieu de AB, les droites CA, CB, sont égales (40): de même, CF étant perpendiculaire sur le milieu de BD, les droites CB, CD, sont égales. Donc les trois lignes CA, CB, CD, sont égales; donc elles sont les rayons d'une même circonférence qui passe par les trois points proposés.

91. *Corollaire.* Puisque le point C d'intersection des perpendiculaires ME, NF, est *unique*, il s'ensuit que par les trois points A, B, D, on ne peut faire passer qu'une circonférence de cercle, et que par conséquent deux circonférences de cercle ne peuvent pas passer par les trois mêmes points sans se confondre.

92. Théorème V. *Si une droite* MN (Fig. 60) *rencontre la circonférence d'un cercle en deux points* A *et* B, *elle coupera le cercle, c'est-à-dire qu'elle entrera dans le cercle, et qu'elle en sortira.*

Menez, du centre C, les rayons CA, CB, et la perpendiculaire CE sur AB. Les deux obliques CA, CB, sont égales, comme rayons d'un même cercle, et chacune d'elles est plus grande que la perpendiculaire CE (45). Toutes les lignes qu'on pourra mener du point C aux parties AE, BE, seront semblablement plus longues que CE, et plus courtes que CA ou CB. Donc, 1°. la partie AB de la ligne proposée est située toute entière en-dedans du cercle; 2°. si du point C on mene en-delà de A la droite quelconque CM, et en-delà de B la droite quelconque CN; chacune de ces lignes, s'éloignant plus que CA ou CB de la perpendiculaire CE, sera plus lon-

gue que CA ou CB. Donc les parties AM, BN, de la ligne en question sont situées hors du cercle. Donc enfin la ligne MN entre dans le cercle et en sort; donc elle coupe le cercle.

93. *Corollaire.* Imaginons que la droite MN se meuve parallèlement à elle-même jusqu'à ce que les deux points A et B viennent se confondre l'un et l'autre avec le point E (Fig. 61): alors MN touche simplement le cercle en E, et CE devient un rayon, lequel est perpendiculaire à la *tangente* MN.

De là on voit que, pour mener à une circonférence une tangente qui passe par un point donné sur cette circonférence, il faut mener un rayon à ce point, et élever (42) par ce même point une perpendiculaire au rayon.

94. Théorême VI. *Deux circonférences de cercle, qui se rencontrent en deux points* A *et* B, *se coupent* (Fig. 62).

Joignez les centres O et C par la droite OC, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence du cercle X au point H; menez du centre O les rayons OA, OB, du cercle Y; tirez du même point à l'arc AVB du cercle X, compris entre les points A et B, des droites telles que OE, et à l'arc extérieur AHB, des droites telles que OF; cela posé:

1°. Parmi toutes les lignes OV, OE, OB, menées du point O, qui n'est pas le centre du cercle X, à l'arc AVB qui appartient à ce cercle, la droite OV est la plus courte (85); et toutes les lignes OE sont plus courtes que les rayons OA, OB, du cercle Y. Donc tous les points E de l'arc AVB sont situés au-dedans du cercle Y; ainsi le cercle X entre dans le cercle Y.

2°. Parmi toutes les lignes OH, OF menées du point O, qui n'est pas le centre du cercle X, à l'arc AHB de ce cercle, la droite OH est la plus longue (82), et chacune des lignes OF est plus longue que le rayon OA ou OB du cercle Y. Donc tous les points F de l'arc AHB sont situés hors du cer-

cle Y ; donc l'arc AHB est placé hors du cercle Y. Donc enfin le cercle X entre dans le cercle Y et en sort ; donc ces deux cercles se coupent.

95. *Corollaire I.* Imaginons que le cercle X demeurant immobile, le cercle Y s'en éloigne suivant la direction HK : il est clair que les points A et B se rapprocheront continuellement l'un de l'autre, et qu'enfin ils viendront se confondre l'un et l'autre avec le point V (Fig. 63) ; alors les deux cercles X et Y se touchent. Par où l'on voit que les centres de deux cercles et leur point d'attouchement sont toujours placés sur une même ligne droite, et que toute ligne qui passera par deux de ces points passera nécessairement par le troisieme.

Ainsi, lorsqu'on voudra décrire deux cercles X et Y, qui se touchent, on n'aura qu'à mettre leurs rayons CV, VO, bout à bout, sur une même ligne KH, et qu'à décrire ensuite ces cercles des points C et O comme centres.

Si on vouloit que les deux cercles se touchassent en-dedans, il faudroit porter le plus petit rayon VO sur le plus grand VC.

96. *Corollaire II.* Si par le point V on éleve perpendiculairement à HK la droite VZ, cette ligne touchera chacun des deux cercles X et Y (93), puisqu'elle sera perpendiculaire à l'extrémité de chacun des rayons CV, OV.

CHAPITRE VII.

Usage de la circonférence du cercle, pour mesurer et comparer les angles : problêmes divers.

97. Il est facile d'imaginer plusieurs manieres de construire un angle et de rapporter toutes les grandeurs de cette nature à une même *unité*, ou à un même terme de comparaison. Mais la circonférence du cercle fournit à cet égard les moyens

les plus simples et les plus commodes : moyens qui ont été employés par tous les géometres anciens ou modernes, et auxquels il seroit plus qu'inutile d'en vouloir substituer d'autres.

98. Par une convention qui remonte à la plus haute antiquité, tous les mathématiciens ont partagé jusqu'ici la circonférence du cercle en 360 *parties* ou *degrés*, le degré en 60 minutes, la minute en 60 secondes ; etc. Aujourd'hui, depuis que nous commençons à employer les nouvelles mesures dont il a été parlé dans l'*arithmétique*, l'usage s'établit en France de partager la circonférence du cercle en 400 degrés, le degré en dix parties égales, chacune de ces parties en dix parties égales, etc. Mais comme cette nouvelle division n'est pas encore adoptée universellement, et que peut-être même les étrangers ne s'y soumettront pas, aussitôt qu'on le desireroit ; je prendrai mes déterminations conformément à la plus générale, c'est-à-dire, à l'ancienne, qu'on rappellera, au surplus, à la nouvelle, par les principes qui ont été expliqués dans l'*arithmétique*.

99. Je supposerai donc que la circonférence du cercle soit divisée en 360 degrés ; le degré en 60 minutes ; la minute en 60 secondes ; la seconde en 60 tierces ; etc. Les degrés, minutes, secondes, tierces, etc., s'expriment respectivement par les caracteres $^\circ$, $'$, $''$, $'''$, qu'on écrit en forme d'exposants à la droite des chiffres qui en expriment les nombres : ainsi, par exemple, on désigne 25 degrés, 46 minutes, 37 secondes, etc., par 25°, $46'$, $37''$, etc.

Le rayon du cercle dont la circonférence sert à mesurer les angles est une quantité arbitraire ; de sorte qu'à cet égard deux circonférences qui ont des rayons différents sont toujours censées divisées en un même nombre de parties correspondantes, lesquelles seulement sont plus grandes dans la grande circonférence que dans l'autre. Ainsi, si du même centre C (Fig. 64), avec des rayons différents CA, Ca, on décrit deux cercles concentriques ; aux degrés AD, DE, EF, etc. de la premiere circonférence, répondront

en pareil nombre les degrés *ad*, *de*, *ef*, etc. de la seconde.

100. Pour mesurer les angles, au moyen de la circonférence d'un cercle, il faut considérer que le sommet d'un angle peut occuper quatre positions différentes relativement à ce cercle : il peut être placé au centre, ou à la circonférence, ou en-dedans du cercle, ou en-dehors ; ce qui donne lieu à quatre mesures différentes. La premiere sert à régler les trois autres.

101. Théorême I. *Un angle* ACB (Fig. 65) *qui a son sommet au centre* C *du cercle a pour mesure l'arc* AB *compris entre ses côtés.*

Imaginons qu'au premier instant le côté CB étoit couché sur le côté AC, et que le côté AC demeurant immobile, on a fait tourner CB autour du point C pour former l'angle ACB : il est clair que le point B a décrit l'arc AB, qui exprime par le nombre de ses degrés, minutes, secondes, etc. la quantité dont le côté CB s'est éloigné de sa position primitive. Ainsi cet arc représente le changement de position qui est arrivé aux lignes CA, CB, en vertu du mouvement de CB, ou l'angle ACB qu'elles forment actuellement entre elles ; et tous les angles possibles peuvent être mesurés, ou comparés entre eux, par le moyen de pareils changements de position.

On remarquera que l'angle ACB peut être mesuré également par l'arc *mn* décrit du rayon C*m* ou C*n*. Le rayon du cercle destiné à la mesure des angles est arbitraire. Mais, pour comparer ensemble des angles par les grandeurs absolues des arcs qui en sont les mesures, il faut que ces arcs appartiennent à un même cercle, ou à des cercles qui ont des rayons égaux.

102. *Corollaire.* L'angle droit ACB (Fig. 66) a pour mesure le quart de la circonférence, ou un arc de 90 degrés ; car les quatre angles droits ACB, BCE, ECK, KCA, formés autour du centre C du cercle, comprennent entre leurs

côtés la circonférence entiere du cercle ; et par conséquent chacun d'eux a pour mesure un arc de 90 degrés.

L'angle aigu DCE a pour mesure un arc ED moindre que 90 degrés ; et au contraire l'angle obtus ACD a pour mesure un arc ABD plus grand que 90 degrés ; car l'angle aigu est moindre que l'angle droit, et l'angle obtus est plus grand que l'angle droit.

103. Théorême II. *Un angle* BAD (Fig. 67, 68, 69) *qui a son sommet à la circonférence, et qui est formé par deux cordes, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Puisqu'un angle qui a son sommet au centre du cercle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés (101), le théorême présent sera démontré, si l'on fait voir que l'angle, dont il s'agit maintenant, ne comprend entre ses côtés que la moitié de l'arc qu'il comprendroit, s'il avoit son sommet au centre. Or, pour y parvenir facilement, je distingue trois cas. Ou l'un AD des côtés de l'angle proposé passe par le centre (Fig. 67) ; ou le centre est placé au-dedans de l'angle (Fig. 68) ; ou enfin le centre est placé hors de l'angle (Fig. 69). La démonstration du premier cas emportera celle des deux autres.

I. Cas. (Fig. 67). Menez par le centre C le diametre MN parallele à la corde AB : l'arc AM sera égal (89) à l'arc BN, et l'angle BAD sera égal (63) à l'angle NCD. Or, l'angle NCD, qui a son sommet au centre, a pour mesure l'arc ND compris entre ses côtés ; donc l'angle BAD a même mesure. Mais, d'un autre côté, les deux arcs ND, AM, sont égaux, puisqu'ils mesurent les angles NCD, ACM, lesquels, étant opposés par le sommet au centre C, sont par conséquent égaux (34). Donc *arc* ND = *arc* AM = *arc* BN. Ainsi la mesure de l'angle BAD est la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

II. Cas. (Fig. 68). Menez par le sommet A de l'angle et par le centre C du cercle le diametre AO ; l'angle proposé sera partagé en deux angles BAO, OAD, qui, par le I.

cas, auront chacun pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Donc l'angle BAD aura pour mesure la somme des deux moitiés des arcs BO, OD, ou, ce qui revient au même, la moitié de l'arc total BOD.

III. Cas. (Fig. 69). Qu'on mene encore par le sommet A et par le centre le diametre AO : l'angle BAO aura pour mesure la moitié de l'arc BDO, ou la moitié de l'arc BD, plus la moitié de l'arc DO; et l'angle DAO aura pour mesure la moitié de l'arc DO. Donc l'angle BAD, différence des deux angles BAO, DAO, aura pour mesure la moitié de l'arc BD, laquelle est la différence des mesures de ces deux angles.

104. *Corollaire I.* Un angle BAD (Fig. 70) est droit, lorsqu'ayant son sommet A à la circonférence, il s'appuie sur un diametre BD, puisqu'il a pour mesur la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence, c'est-à-dire, la mesure de l'angle droit (102).

Un angle BAD (Fig. 71) est aigu, lorsqu'ayant son sommet à la circonférence, il s'appuie sur une corde BD qui laisse le centre au-dedans de l'espace BAD, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc BND moindre que la demi-circonférence; et au contraire l'angle BAD (Fig. 72) qui laisse le centre C en-dehors de l'espace BAD est obtus, puisqu'alors l'arc BND est plus grand que la demi-circonférence.

105. *Corollaire II.* Comme deux angles de suite valent toujours ensemble deux angles droits : si leur sommet commun est placé à la circonférence d'un cercle, leur somme aura pour mesure la moitié de la circonférence.

De là, 1°. si un angle BAF (Fig. 73) est formé par une corde AB et par une droite AF extérieure au cercle, il aura pour mesure la moitié de l'arc AEB soutendu par la corde AB, plus la moitié de l'arc AGD soutendu par la corde AD prolongement de FA; car la somme des deux angles de suite BAD, BAF, a pour mesure la moitié de la circonférence. Or l'angle BAD, qui est formé par les deux cordes AB, AD,

a pour mesure la moitié de l'arc BOD compris entre ses côtés. Donc l'angle BAF a pour mesure la moitié de la partie restante BEAGD, ou la moitié de l'arc BEA, plus la moitié de l'arc AGD.

2°. Si l'on fait tourner la droite FAD autour du point A, jusqu'à ce qu'arrivée à la position F'AD', elle ne fasse que toucher le cercle en A, les points D et G se rapprocheront continuellement du point A, et finiront par se confondre avec lui ; de sorte que l'arc AGD deviendra nul : dans cet état, l'angle F'AB formé par la corde AB et par la tangente AF' aura simplement pour mesure la moitié de l'arc AEB soutendu par la corde ; et l'angle BAD' aura pour mesure la moitié de la partie restante BOA de la circonférence. Ainsi, en général, un angle formé par une corde et par une tangente au cercle a pour mesure la moitié de l'arc soutendu par la corde.

La même chose peut se voir, en menant au point A le rayon CA, lequel sera perpendiculaire à la tangente FAF' (93) ; d'où il résulte que l'angle droit OAF' ayant pour mesure la moitié de la demi-circonférence AEBO, et l'angle BAO ayant pour mesure la moitié de l'arc BO, l'angle BAF' a pour mesure la moitié de la partie restante AEB ; de même, l'angle droit OAD' ayant pour mesure la moitié de la demi-circonférence ADO, et l'angle BAO ayant pour mesure la moitié de l'arc BO, l'angle BAD' a pour mesure la moitié de la somme des deux arcs ADO, OB, ou la moitié de l'arc ADOB.

106. Théorême III. *Un angle* BAD (Fig. 74), *qui a son sommet en un point quelconque* A *au-dedans du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc* BOD, *compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc* bod, *compris entre les prolongements* A*b*, A*d*, *de ses côtés.*

Menez par le point *b* la corde *bf* parallele à *d*D : l'angle BAD sera égal à l'angle B*bf* (63) ; et par conséquent ces deux angles auront la même mesure. Or (103), l'angle B*bf* a pour mesure la moitié de l'arc *f*DOB, ou, ce qui revient au même, la moitié de l'arc DOB,

plus la moitié de l'arc *f*D, ou de l'arc *bod*, qui est égal à l'arc *f*D (89). Donc l'angle proposé BAD a pour mesure la moitié de l'arc DOB, plus la moitié de l'arc *bod*.

107. Théorême IV. *Un angle* BAD (Fig. 75), *qui a son sommet* A *hors du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave* BO D *compris entre ses côtés, moins la moitié de l'arc convexe* HK *compris aussi entre ses côtés.*

Menez par le point K, la corde KQ parallele à AB: les deux angles BAD, QKD, seront égaux, et par conséquent auront la même mesure. Or, l'angle QKD a pour mesure (103) la moitié de l'arc QD, ou, ce qui revient au même, la moitié de l'arc BOD, moins la moitié de l'arc BQ, ou la moitié de l'arc HK, qui est égal à l'arc BQ (89). Donc l'angle BAD a aussi pour mesure la moitié de l'arc BOD, moins la moitié de l'arc HK.

Faisons quelques applications de la théorie précédente.

108. Problême I. *Construire un angle qui soit égal à un angle donné* ACB (Fig. 76), *ou qui en soit multiple un certain nombre de fois.*

Du point C, comme centre, avec un rayon arbitraire CA, décrivez l'arc A*m*B entre les côtés de l'angle proposé; tirez la corde AB de cet arc; du point O (Fig. 77), pris sur la ligne indéfinie OM, comme centre, et avec un rayon OM égal à CA, décrivez l'arc indéfini MNPQ; du point M, comme centre, avec un rayon MN égal à la corde AB, décrivez un arc de cercle qui coupe l'arc MNPQ au point N; tirez ON; et l'angle MON sera égal à l'angle donné ACB; car les arcs A*m*B, M*x*N, qui sont les mesures de ces deux angles, et qui sont décrits avec le même rayon, sont égaux (86), ayant les cordes égales AB, MN.

Il n'est pas plus difficile de faire un angle multiple de l'angle ACB: car, par exemple, veut-on faire un angle MOQ qui soit triple de l'angle ACB? on portera successivement, comme tout-à-l'heure, la corde AB de M en N, de N en P, de P en Q, et on tirera OQ; ce qui donnera

l'angle MOQ triple de ACB, puisque chacun des angles MON, NOP, POQ, est égal à l'angle ACB.

109. Problème II. *Partager un angle donné* ACB (Fig. 78) *en deux parties égales.*

Ayant décrit du point C, comme centre, avec un rayon arbitraire CA, l'arc A*m*B entre les côtés de l'angle proposé, décrivez de même des points A et B, comme centres, avec un rayon arbitraire, deux arcs de cercle qui se coupent au point X. Menez par le centre C, et par le point X, la droite CX : elle partagera l'angle ACB en deux parties égales ; car les points C et X, étant chacun également éloignés des points A et B, sont placés (40) sur une perpendiculaire à la corde AB, laquelle passe par le milieu de l'arc A*m*B (87). D'où il suit que les deux angles AC*m*, *m*CB, qui ont pour mesures les arcs égaux A*m*, *m*B, sont égaux, et sont par conséquent chacun la moitié de l'angle ACB.

110. *Corollaire.* En opérant de la même maniere, on peut partager chacun des angles AC*m*, *m*CB, en deux parties égales ; de même chacun des angles résultants peut être partagé en deux parties égales ; chacun de ceux-ci en deux parties égales ; ainsi de suite : d'où l'on voit que l'angle primitif ACB peut être partagé successivement en un nombre de parties égales, exprimé par les termes de cette progression géométrique $\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : etc.

Il n'est pas possible de partager en général un angle en trois parties égales, en employant seulement, comme dans les opérations précédentes, le secours de la regle et du compas. Ce problème, connu sous le nom de *trisection de l'angle*, a été célebre parmi les anciens géometres, dont plusieurs en ont cherché vainement la solution par le moyen qu'on vient d'indiquer. Nous donnerons, dans l'application de l'algebre à la géométrie, la maniere de le résoudre par l'intersection de certaines courbes.

La même difficulté a lieu pour partager en général un angle en 5 parties égales, en 7 parties égales, etc.

111. Problème III. *Par un point donné* B (Fig. 79), *mener une parallele à la droite* GH.

Nous avons déja donné (60) une solution de ce problème ; mais la suivante est plus simple et plus commode.

Ayant mené d'un point O, pris arbitrairement sur GH, au point B, la droite OB, décrivez de ce point O, comme centre, avec le rayon OB, l'arc B*m*A qui rencontre GH en A ; tirez la corde BA : du point B, comme centre, avec le rayon BO, décrivez l'arc indéfini O*nq* ; portez la corde AB de O en C. Par les points B et C menez la droite IBCK : elle sera parallele à GH (64) ; car les angles alternes internes AOB, OBC sont égaux, ayant pour mesures les arcs égaux A*m*B, O*n*C.

112. Problème IV. *d'un point donné* A (Fig. 80) *mener une tangente à la circonférence* MNK*n*.

Joignez le point A et le centre C par la droite AC ; divisez (41) la ligne AC en deux parties égales ; du milieu O, avec le rayon OA ou OC, décrivez une circonférence de cercle ; du point A au point N, où cette circonférence coupe la premiere, tirez la droite AN : cette ligne est la tangente demandée ; car, en menant la droite CN, l'angle ANC est droit (104), puisqu'il a son sommet à la circonférence ANC*n*, et qu'il s'appuie sur le diametre AC. Donc AN est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CN du cercle MNK*n*, et par conséquent (93) AN touche la circonférence de ce cercle au point N.

On voit que dans la partie inférieure de la Figure il y a un point *n* analogue au point N, et qu'ainsi on peut mener du point A deux tangentes AN, A*n*, à la circonférence proposée.

113. Problème V. *Etant donné un point* D (Fig. 81) *sur une droite donnée* AB : *trouver hors de cette ligne un paint* H *tel que menant les droites* HA, HB, HD, *les deux angles* AHD, BHD *soient égaux.*

Tirez la droite indéfinie CF qui soit perpendiculaire sur le milieu C de AB (41) ; de ce même point C, avec le

rayon CA ou CB, décrivez la circonférence de cercle AFBH qui coupe en F la droite CF; par le point F et le point D, menez la droite FDH : le point H où cette ligne rencontre la circonférence est celui qu'on demande, puisque les deux angles AHD, BHD, sont égaux, comme ayant pour mesures les moitiés des arcs égaux AF, BF.

114. Problême VI. *Etant données trois des six choses (trois angles et trois côtés) qui constituent un triangle : construire le triangle.*

Il n'est ici question que de constructions graphiques, qui s'operent par le moyen de la regle et du compas : par des *angles donnés*, nous entendrons des angles tels que décrivant de leurs sommets pour centres, avec un rayon pris à volonté, des arcs de cercle entre leurs côtés, les cordes de ces arcs sont censées *données*. On traitera dans la suite la question par le calcul trigonométrique.

1°. Soient donnés un angle du triangle, et les deux côtés qui doivent comprendre cet angle. Ayant mené la droite indefinie AV (Fig. 82, n°. 1), je prends sur cette ligne la partie AB égale à l'un des côtés donnés du triangle; je fais (108) l'angle VAZ égal à l'angle donné; je prends sur la droite indéfinie AZ, la partie AC égale au second côté donné du triangle; enfin je tire BC; ce qui me donne le triangle ABC qu'on demandoit.

2°. Soient donnés le côté AB et les deux angles adjacents à ce côté : on formera, en A et B, deux angles ABC, CAB, qui aient le côté commun AB, et qui soient égaux chacun à chacun des deux angles donnés du triangle; ce qui donnera la position des deux droites AC, BC, qui se couperont en C, et qui détermineront le triangle demandé ABC.

3°. Le cas où l'on donneroit un côté, et deux angles (qui ne pourroient être (67) tous deux droits, ou tous deux obtus), revient au précédent, puisque connoissant deux angles, on connoît le troisieme (66), et que par conséquent on connoîtroit un côté et les deux angles adjacents.

4°. Si les trois côtés du triangle sont donnés, c'est-à-dire, s'il est question d'assembler trois lignes droites données de grandeur, de maniere qu'elles forment un triangle, il faudra d'abord (5) pour que le problême soit possible, que chacune de ces trois lignes soit moindre que la somme, et plus grande que la différence des deux autres. Cette condition présupposée, je prends une droite AB égale à l'une des trois lignes données ; des points A et B pour centres, avec des rayons égaux respectivement aux deux autres lignes données, je décris deux arcs de cercle, qui se coupent en C, et qui déterminent le triangle demandé ABC.

5°. Soient donnés deux côtés, et l'angle opposé à l'un de ces côtés. En prenant AB (Fig. 82, n°. 2) pour le côté donné, construisez d'abord l'angle BAC égal à l'angle donné ; ensuite du point B, pour centre, avec un rayon égal à l'autre côté donné, décrivez un arc de cercle COC′, qui coupe la droite indéfinie ACC′, aux points C, C′ ; enfin, menez les droites BC, BC′ ; vous aurez deux triangles ABC, ABC′, qui satisfont au problême, comme il est évident. De sorte qu'ici le problême a deux solutions.

6°. Si l'on donnoit seulement deux angles, ce qui emporteroit (66) la connoissance du troisieme, le problême admettroit une infinité de solutions ; car, en se donnant à volonté l'un des côtés, et construisant à ses extrémités, comme dans le second cas, deux angles égaux chacun à chacun de deux angles donnés du triangle, on formeroit une infinité de triangles qui satisferoient au problême.

On ne doit pas oublier que la somme des deux angles donnés doit toujours être moindre que deux angles droits.

115. *Corollaire.* De là on voit qu'on peut construire un triangle équilatéral sur une ligne donnée ; un triangle isoscele dont on connoît l'un des côtés, et l'un des angles.

116. *Remarque.* On résout semblablement le problême, où étant données les mêmes conditions que ci-dessus (114), pour un triangle ABC (Fig. 30), il s'agiroit de construire

un autre triangle DEF (Fig. 31) qui lui fût parfaitement égal.

117. Problême VII. *Sur une base donnée* BC (Fig. 83), *construire, sans compas, ni cordeau, un arc de cercle d'un nombre donné de degrés.*

Formez avec deux regles de bois ou de métal AB, AC, assemblées solidement en A, un angle BAC, qui ait pour valeur l'excès de 180 degrés sur la moitié de la valeur donnée de l'arc demandé ; plantez aux extrémités B, C, de la base donnée, deux piquets autour desquels vous ferez tourner l'angle BAC, de maniere que les côtés AB, AC touchent continuellement ces piquets : le sommet A décrira l'arc demandé. En effet, si le sommet A étant dans une position quelconque, vous faites passer, par les trois points A, B, C, une circonférence de cercle BPAQCO, le point A, pendant le mouvement de l'angle, ne quittera point l'arc BPAQC, puisque tous les angles BAC, BPC, BQC, demeurant égaux (à cause de la position fixe des regles qui forment les côtés de l'angle tournant), ils ont tous pour mesure la moitié du même arc BOC, et que par conséquent leurs sommets sont placés sur l'arc opposé et supplémentaire BPAQC. De plus, ce dernier arc a la valeur requise, puisque dans les triangles ABC, PBC, QBC, la somme des deux angles ABC et ACB, ou PBC et PCB, ou QBC et QCB, a pour mesure la moitié de cet arc, et que cette moitié, jointe à la valeur de l'angle BAC, ou BPC, ou BQC, forme 180 degrés, comme cela doit être.

SECONDE PARTIE.

DES SURFACES.

118. L'OBJET général de cette seconde partie est d'apprendre à mesurer les surfaces des polygones, et à comparer ensemble deux polygones semblables, tant à l'égard de leurs contours ou lignes homologues, que par rapport à leurs surfaces. A ces théories appartiennent diverses propriétés des figures, qu'on exposera successivement.

CHAPITRE PREMIER.

Mesure de la surface d'un polygone quelconque.

119. MESURER la surface d'un polygone, c'est chercher combien de fois elle contient une autre surface regardée comme l'unité.

120. La surface dont nous avons naturellement l'idée la plus claire, et qu'il convient en conséquence de prendre pour unité, est le quarré; car il est composé de quatre côtés égaux, et de quatre angles droits : or, en premier lieu, le rapport de ses côtés est le plus simple de tous; et en second lieu, l'angle droit est celui que nous nous représentons le plus aisément, par l'habitude où nous sommes de voir les objets debout, ou de voir tomber les corps suivant la ligne d'à-plomb, etc. Il est vrai que le triangle a moins de côtés et moins d'angles que le quarré. Mais si les trois côtés d'un triangle peuvent être égaux, il ne peut pas (67) avoir plus d'un angle droit; et un angle oblique ne se peint jamais d'une maniere bien distincte

à l'imagination. Le quarré est donc préférable au triangle et à toute autre Figure pour servir d'unité dans la mesure des surfaces. Aussi les géometres, d'un commun accord, ont-ils adopté le quarré pour unité dans la mesure des surfaces ; et de là ils ont formé l'expression *quadrature d'une surface ou d'une figure*, par laquelle ils entendent la détermination ou l'évaluation de cette Figure en quarrés.

Avant que de venir à la quadrature des polygones rectilignes, commençons par donner quelques définitions.

121. On appelle *hauteur* d'un parallélogramme ABCD (Fig. 84), ou d'un triangle ABC, la perpendiculaire AO, abaissée d'un angle A sur le côté opposé BC, prolongé s'il est nécessaire. Le côté sur lequel tombe la perpendiculaire, s'appelle *base* du parallélogramme, ou du triangle. Dans le rectangle, la hauteur se confond avec le côté AB, parcequ'alors AB est perpendiculaire sur BC.

On voit que deux parallélogrammes ABCD, MNPQ, qui ont des hauteurs égales AO, MR, ou deux triangles ABC, MNP, qui ont pareillement des hauteurs égales AO, MR, peuvent toujours être supposés compris entre les mêmes paralleles, puisque deux lignes paralleles sont partout également distantes l'une de l'autre (58).

122. Théorême I. *Tout parallélogramme* ABCD, *est égal en surface à un rectangle* EBCF, *de même base et de même hauteur.*

Dans le parallélogramme ABCD, on a (80) AB = DC, AD = BC ; et de même dans le rectangle EBCF, on a EB = FC, EF = BC. Donc AD = EF. Otant la partie AF, commune à ces deux lignes, restera EA = FD. Donc les deux triangles FCD, EBA, ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent parfaitement égaux (51). Ajoutant à chacun d'eux le trapeze ABCF, on aura le parallélogramme ABCD égal au rectangle EBCF.

123. *Corollaire I.* Donc si les deux parallélogrammes

ABCD, MNPQ, qui ont des hauteurs égales, ont de plus leurs bases BC, NP, égales; ils auront des surfaces égales, quelques différents que puissent être leurs angles. Car chacun d'eux est égal à un rectangle de même base et de même hauteur.

124. *Corollaire II.* Tout triangle ABC peut être considéré comme la moitié du parallélogramme ABCD, qui a même base et même hauteur que lui. Donc, puisque ce parallélogramme est égal au rectangle EBCF, de même base et de même hauteur, il s'ensuit que tout triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur que lui.

125. *Corollaire III.* Donc si les deux triangles ABC, MNP, qui ont des hauteurs égales, ont de plus leurs bases BC, NP, égales, ils auront des surfaces égales, quelque différents que puissent être leurs angles. Car, par l'article précédent, chacun d'eux est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur.

On voit par ces propositions, que lorsqu'on saura trouver la surface d'un rectangle, on saura trouver aussi celle d'un parallélogramme quelconque, et celle d'un triangle quelconque.

126. Théorême II. *La surface d'un rectangle* EBCF (Fig. 85), *est égale au produit de sa base et de sa hauteur; ce qui s'exprime ainsi,* EBCF = BC × BE.

Le sens de cet énoncé est que si l'on prend une certaine mesure, le pied, par exemple, pour unité de ligne, et que cette mesure soit contenue, si l'on veut, 15 fois dans la base BC du rectangle, et 12 fois dans sa hauteur BE; la surface de ce rectangle contiendra 15 × 12, ou 180 pieds quarrés, c'est-à-dire, 180 quarrés qui ont chacun un pied de côté.

Soient, sur la base BC, les parties Bf, fg, gh, etc. les unités de ligne, et sur la hauteur BE, les parties Bm, mn, nq, etc., également les unités de ligne. Cela posé,

1°. par tous les points f, g, h, etc. de la base, menez des paralleles à la hauteur BE : le rectangle EBCF se trouvera partagé en rectangles qui ont tous même hauteur que lui, et pour bases les unités de ligne ; et le nombre de ces rectangles partiels ou élémentaires est celui des divisions de la base BC. 2°. Par tous les points m, n, q, etc. de la hauteur, menez des paralleles à la base BC; chaque rectangle partiel sera partagé en autant de quarrés qui ont l'unité de ligne pour côtés, qu'il y a de divisions dans la hauteur. Donc, pour avoir le nombre des quarrés contenus dans la surface du rectangle total EBCF, il faut répéter le nombre des rectangles élémentaires, ou le nombre des divisions de la base BC, autant de fois qu'il y a de divisions dans la hauteur BE : donc cette surface est exprimée par BC × BE.

Si l'unité de ligne n'est pas contenue exactement dans la base BC, ou dans la hauteur BE, il pourra se trouver dans l'expression de la surface EBCF une fraction de quarré, qu'on évaluera, si on le juge à propos, en mesures quarrées d'un ordre inférieur.

127. *Corollaire I.* Donc (122) la surface du parallélogramme quelconque ABCD (Fig. 84) = BC × AO. Ainsi, si la base BC = 25 pieds, la hauteur AO = 17 $\frac{1}{2}$ pieds, la surface ABCD sera de 437 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés.

128. *Corollaire II.* Donc la surface du triangle ABC $= \frac{BC \times AO}{2}$. Ainsi, si BC = 25 pieds, AO = 17 $\frac{1}{2}$ pieds, la surface ABC sera = 218 $\frac{3}{4}$ pieds quarrés.

129. *Corollaire III.* Deux parallélogrammes ABCD, MNPQ, qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BC, NP. Car ABCD : MNPQ :: BC × AO : NP × MR. Or, puisque AO = MR, si l'on divise les produits BC × AO, NP × MR, par ces quantités égales, leur rapport demeurera toujours le même, suivant la théorie des proportions : donc ABCD : MNPQ :: BC : NP.

ABCD, MNPQ, qui ont des hauteurs égales, ont de plus leurs bases BC, NP, égales; ils auront des surfaces égales, quelques différents que puissent être leurs angles. Car chacun d'eux est égal à un rectangle de même base et de même hauteur.

124. *Corollaire II.* Tout triangle ABC peut être considéré comme la moitié du parallélogramme ABCD, qui a même base et même hauteur que lui. Donc, puisque ce parallélogramme est égal au rectangle EBCF, de même base et de même hauteur, il s'ensuit que tout triangle est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur que lui.

125. *Corollaire III.* Donc si les deux triangles ABC, MNP, qui ont des hauteurs égales, ont de plus leurs bases BC, NP, égales, ils auront des surfaces égales, quelque différents que puissent être leurs angles. Car, par l'article précédent, chacun d'eux est la moitié d'un rectangle de même base et de même hauteur.

On voit par ces propositions, que lorsqu'on saura trouver la surface d'un rectangle, on saura trouver aussi celle d'un parallélogramme quelconque, et celle d'un triangle quelconque.

126. Théorème II. *La surface d'un rectangle EBCF* (Fig. 85), *est égale au produit de sa base et de sa hauteur; ce qui s'exprime ainsi*, EBCF = BC × BE.

Le sens de cet énoncé est que si [illegible] taine mesure, le pied, par [illegible] et que cette mesure soit [illegible] dans la base BC d[illegible] teur BE; la surf[illegible] ou 180 pied[illegible] chacun un[illegible]

Soient [illegible] unités d[illegible] mn, [illegible]

1°. par tous les points f, g, h, etc. de la base, menez des paralleles à la hauteur BE : le rectangle EBCF se trouvera partagé en rectangles qui ont tous même hauteur que lui, et pour bases les unités de ligne ; et le nombre de ces rectangles partiels ou élémentaires est celui des divisions de la base BC. 2°. Par tous les points m, n, q, etc. de la hauteur, menez des paralleles à la base BC; chaque rectangle partiel sera partagé en autant de quarrés qui ont l'unité de ligne pour côtés, qu'il y a de divisions dans la hauteur. Donc, pour avoir le nombre des quarrés contenus dans la surface du rectangle total EBCF, il faut répéter le nombre des rectangles élémentaires, ou le nombre des divisions de la base BC, autant de fois qu'il y a de divisions dans la hauteur BE : donc cette surface est exprimée par BC × BE.

Si l'unité de ligne n'est pas contenue exactement dans la base BC, ou dans la hauteur BE, il pourra se trouver dans l'expression de la surface EBCF une fraction de quarré, qu'on évaluera, si on le juge à propos, en mesures quarrées d'un ordre inférieur.

127. *Corollaire I.* Donc (122) la surface du parallélogramme quelconque ABCD (Fig. 84) = BC × AO. Ainsi, la base BC = 25 pieds, la hauteur AO = 17 ½ pieds, la surface ABCD sera de 437 ½ pieds quarrés.

128. *Corollaire II.* Donc la surface du triangle ABC $= \frac{BC \times AO}{2}$. Ainsi, si BC = 25 pieds, AO = 17 ½ pieds, la surface A… pieds

…mes ABCD, …ntre eux comme … : MNPQ :: BC × …O = MR, si l'on divise …R, par ces quantités égales, …rs le …e, suivant la théo… …BC … Q :: BC : NP.

Par la même raison, deux triangles ABC, MNP, qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BC, NP, parcequ'ils sont les moitiés de parallélogrammes de mêmes bases et de mêmes hauteurs, et que les moitiés sont entre elles comme les touts.

On peut dire aussi, toujours par les mêmes raisons, que deux parallélogrammes, ou deux triangles, qui auroient des bases égales, seroient entre eux comme leurs hauteurs.

130. *Corollaire IV.* La surface d'un trapeze ABCD (Fig. 86), est égale à la moitié du produit de la somme de ses côtés opposés paralleles AD, BC, par sa hauteur AO; c'est-à-dire, que $ABCD = \frac{(AD+BC)\times AO}{2}$. Car, si l'on tire la diagonale AC, le trapeze sera partagé en deux triangles ABC, CAD, qu'on pourra regarder comme ayant pour hauteur commune la droite AO, et pour bases les droites BC, AD. Donc la somme des surfaces de ces triangles ou la surface du trapeze $= \frac{BC\times AO}{2} + \frac{AD\times AO}{2} = \frac{(AD+BC)\times AO}{2}$.

131. *Corollaire V.* Imaginons que sur la droite AE (Fig. 87), s'élevent les perpendiculaires inégales AF, BG, CH, DK, EI, et qu'on mene les droites FG, GH, HK, KI; il est clair qu'on aura l'expression de la surface AEIKHGF, en ajoutant ensemble les expressions des surfaces de tous les trapezes AFGB, BGHC, etc. Or, la surface du premier $= \frac{AB\times(AF+BG)}{2}$; celle du second $= \frac{BC\times(BG+CH)}{2}$, etc. Donc $AEIKHGF = \frac{AB\times(AF+BG)}{2} + \frac{BC\times(BG+CH)}{2} + \frac{CD\times(CH+DK)}{2} + \frac{DE\times(DK+EI)}{2}$.

Lorsque toutes les parties AB, BC, CD, DE, de la base sont égales, cette expression se simplifie à cause du facteur commun à tous ses termes; alors elle peut se changer en celle-ci, $\frac{AB\times(AF+BG+BG+CH+CH+DK+DK+EI)}{2}$, qui se réduit à celle-ci, $AB\times\left(BG+CH+DK+\frac{AF+EI}{2}\right)$.

D'où l'on voit que *pour avoir la surface cherchée, il faut multiplier l'une des divisions égales de la base par la somme résultante de la somme des perpendiculaires intermédiaires et de la moitié de la somme des deux perpendiculaires extrémes.*

Ainsi, par exemple, si l'on suppose que chacune des divisions AB, BC, CD, etc., soit de 1 toise, et AF = 10 toises, BG = 11 toises, CH = 9 toises, DK = 12 toises, EI = 16 toises; la surface AEIKHGF sera de 45 toises quarrées.

Il y a des praticiens qui, dans le cas dont il s'agit, ajoutent ensemble toutes les perpendiculaires AF, BG, CH, etc.; divisent la somme de leurs valeurs par leur nombre, pour avoir ce qu'ils appellent une *hauteur réduite;* puis multiplient cette hauteur par la base AE, pour avoir la surface AEIKHGF. En suivant cette pratique, on trouveroit que, dans l'hypothese proposée, la surface AEIKHGF est de $46\frac{1}{7}$ toises quarrées; résultat qui differe du précédent, et qui est par conséquent inexact.

Nous observerons en passant que notre méthode peut servir à déterminer par approximation la surface comprise entre une droite AE et la courbe quelconque FGHKI (Fig. 88); car il ne s'agit que d'élever sur la base AE un assez grand nombre de perpendiculaires AF, BG, CH, etc., pour que les arcs FG, GH, etc. puissent être regardés sensiblement comme des lignes droites, et que d'ajouter ensuite les expressions de tous les trapezes AFGB, BGHC, etc.

132. *Corollaire VI.* Qu'on ait un polygone quelconque ABCDEF (Fig. 89), dont il faille déterminer la surface. Je mene d'un angle A de ce polygone des diagonales AC, AD, AE, aux angles C, D, E, ce qui partage le polygone en triangles ABC, ACD, etc. De l'angle A, j'abaisse sur les bases BC, CD, etc. de ces triangles, prolongées s'il est nécessaire, les perpendiculaires AG, AH, etc. La surface du polygone étant égale à la somme des surfaces de tous les triangles proposés, elle aura pour expression (128),

$$\frac{BC \times AG}{2} + \frac{CD \times AH}{2} + \frac{DE \times AI}{2} + \frac{EF \times AK}{2}.$$

polygone augmente à l'infini ; il est clair que ces côtés approcheront de plus en plus des arcs qu'ils soustendent, et qu'à la fin le contour du polygone pourra être censé se confondre avec la circonférence du cercle circonscrit, et que de plus l'apothême deviendra égal au rayon. Donc, *pour avoir la surface d'un cercle, il faut prendre la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

On voit par là que si on connoissoit la circonférence d'un cercle dont on connoît le rayon, on auroit l'expression exacte de la surface du cercle. Mais on n'a pas encore pu trouver le moyen d'exprimer rigoureusement la circonférence en parties du rayon, ni d'aucune autre ligne droite connue. Nous donnerons ci-dessous la maniere de la déterminer par approximation.

139. *Remarque I.* La surface du *secteur* de cercle OABQO (Fig. 92), ou de l'espace compris entre l'arc ABQ et les rayons OA, OQ, est égale à la moitié du produit de l'arc ABQ par le rayon OA. Car l'arc ABQ peut être regardé comme une portion du périmetre d'un polygone régulier qui a une infinité de côtés, et OA peut être regardé comme son apothême.

Quant à la longueur de l'arc ABQ, elle se trouve lorsqu'on connoît la longueur de la circonférence entiere et le nombre de degrés de l'arc ABQ, en faisant cette proportion, 360 degrés sont au nombre de degrés de l'arc ABQ, comme la longueur de la circonférence entiere est à un quatrieme terme, qui est la valeur de la longueur cherchée.

140. *Remarque II.* Connoissant la surface du secteur OABQO, on aura celle du *segment* ABQA, compris entre l'arc ABQ et la corde AQ, en retranchant de la surface du secteur celle du triangle isoscele AOQ.

CHAPITRE II.

Comparaison des Figures semblables.

141. TOUTES les grandeurs de même espece se comparent entre elles comme les nombres : de même qu'un nombre est double ou triple d'un autre, une ligne peut être double ou triple d'une autre ligne ; une surface, double ou triple d'une autre ; un solide, double ou triple d'un autre. Ainsi la théorie des proportions pour les nombres ou les grandeurs en général s'appliquera à la géométrie, en imaginant que ces grandeurs sont des lignes, des superficies, et des solides ; ou plutôt en supposant que les grandeurs comparées expriment ici les nombres des parties de l'étendue linéaire, superficielle, ou solide.

Les deux termes qui forment un même rapport sont toujours de la même espece ; mais il n'est pas nécessaire que dans une proportion les deux rapports soient de la même espece : ainsi une ligne peut être à une ligne, comme une surface est à une surface, ou comme un solide est à un solide ; mais une ligne ne peut pas être à une ligne, comme une ligne est à une surface, ou comme une surface est à un solide.

142. On appelle *polygones semblables* deux polygones qui ont le même nombre d'angles égaux chacun à chacun, et les côtés proportionnels autour de ces angles égaux.

Ainsi (Fig. 93 et 94), les deux pentagones ABCDE, FGHIK seront semblables, si les angles A et F, B et G, C et H, etc. sont égaux chacun à chacun, et qu'on ait de plus cette suite de rapports égaux, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF ; ou bien (en mettant tous les antécédents dans une même suite, et les conséquents dans une autre), AB : BC : CD : DE : EA :: FG : GH : HI : IK : KF.

Les angles correspondants A et F, B et G, C et H, etc. s'appellent *angles homologues ;* et les côtés AB et FG, BC et GH, CD et HI, etc. qui se terminent à des angles homologues, s'appellent *côtés homologues.*

143. Il est question dans ce chapitre de déterminer le rapport des contours, parties de contours, des surfaces ou parties de surfaces, dans les polygones semblables : or une telle détermination, étant fondée sur la théorie des lignes proportionnelles et sur celle des triangles semblables, je vais commencer par donner ces deux théories, qui sont d'ailleurs utiles par elles-mêmes dans une infinité d'autres occasions.

SECTION I.

Des lignes proportionnelles.

144. Théorème I. *Si on a deux lignes* AV, AZ (Fig. 95), *qui fassent entre elles un angle quelconque* VAZ, *et qu'ayant pris sur la première un nombre quelconque de parties égales* AB, BC, CD, DE, *on mene sous un angle quelconque les parallèles* BF, CG, DH, EI, *qui rencontrent la seconde aux points* F, G, H, I; *qu'ensuite par ces points on mene parallèlement à* AV *les droites* FS, GT, HX : *je dis,*

1°. *Que toutes les parties* AF, FG, GH, HI, *de la droite* AZ, *sont égales entre elles;*

2°. *Que toutes les parties* EM, MO, OP, PI, *de la droite* EI, *sont égales entre elles.*

En effet, 1°. par hypothèse CB = AB; et dans le parallélogramme BCKF, on a (80) FK = BC : donc FK = AB. Or (63), à cause des parallèles FS, AV, l'angle KFG = l'angle BAF, l'angle FKG = l'angle ACG; et à cause des parallèles CG, BF, l'angle ACG = l'angle ABF; donc l'angle FKG = l'angle ABF. Ainsi les deux triangles FKG, ABF, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, et sont par conséquent parfaitement égaux (50) : donc FG =

AF. On démontrera semblablement que le triangle GNH est parfaitement égal au triangle FKG; que le triangle HPI est parfaitement égal au triangle GNH : d'où il suit que toutes les parties AF, FG, GH, HI de la droite AZ, sont égales entre elles.

2°. Dans le parallélogramme BCKF, on a BF = CK; et à cause des deux triangles parfaitement égaux FKG, ABF, on a KG = BF : donc KG = KC. Dans le parallélogramme CDLK, on a LD = KC; dans le parallélogramme KLNG, on a LN = GK; et à cause des deux triangles parfaitement égaux GNH, FKG, on a HN = GK : donc HN = NL = LD = GK = KC = FB HN = NL = LD = GK = KC = FB. On démontrera de même que IP = PO = OM = ME = FB : donc toutes les parties de la droite EI sont égales.

145. *Corollaire I.* De là suit la maniere de partager une ligne droite en tant de parties égales qu'on voudra. Soit, par exemple, la ligne AQ (Fig. 96) donnée de longueur, qu'il faut partager en cinq parties égales. Je tire par l'une A de ses extrémités la droite indéfinie AV, qui fasse avec elle un angle quelconque VAQ; et sur AV je prends, à compter du point A, avec une ouverture arbitraire de compas, cinq parties égales AB, BC, CD, DE, EF; du dernier point de division F je mene à l'extrémité Q de la ligne proposée la droite FQ; ensuite, par tous les autres points de division E, D, C, B, je mene (111) parallèlement à FQ les droites *Ee*, *Dd*, *Cc*, *Bb*; et la ligne AQ se trouve partagée en cinq parties égales A*b*, *bc*, *cd*, *de*, *e*Q.

146. *Corollaire II.* Puisqu'on a évidemment (Fig. 95) cette suite de rapports égaux, ou plutôt identiques, AB : BC : CD : DE :: AF : FG : GH : HI :: EM : MO : OP : PI; et que dans toute suite de rapports égaux une somme d'antécédents est à une pareille somme de conséquents correspondants, comme un antécédent est à son conséquent, ou comme une autre somme d'antécédents est à une somme pareille de conséquents correspondants; on aura ces différentes suites de rapports égaux :

AB + BC : AF + FG :: AB : AF,
ou AC : AG :: AB : AF;
AB + BC + CD : AF + FG + GH :: AB : AF ::
AB + BC : AF + FG,
ou AD : AH :: AB : AF :: AC : AG;
AB + BC : EM + MO :: AB : EM,
ou AC : EO :: AB : EM;
AB + BC + CD : EM + MO + OP :: AB : EM ::
AB + BC : EM + MO,
ou AD : EP :: AB : EM :: AC : EO, etc.

Ainsi deux parties quelconques de la ligne AE sont entre elles comme les deux parties correspondantes de la ligne AI ou de la ligne EI.

147. Théorème II. *Si dans le triangle* ABC (Fig. 97) *on mene la droite* DE *parallele au côté* BC, *et par le point* E *la droite* EK *parallele au côté* AB, *je dis que les côtés* AB, AC, BC, *seront coupés proportionnellement aux points* D, E, K; *c'est à dire qu'on aura cette suite de rapports égaux* AB : AD :: AC : AE :: BC : BK.

Réciproquement, *si on a la proportion* AB : AD :: AC : AE, *la sécante* DE *sera parallele au côté* BC; *et si on a la proportion* AC : AE :: BC : BK, *la sécante* EK *sera parallele au côté* AB.

Imaginons que la droite AB soit divisée en une infinité de parties égales, et que par tous les points de division on ait mené parallèlement à BC ou à DE des lignes droites qui se terminent à AC : ces lignes (144) partageront AC en une infinité de parties égales correspondantes chacune à chacune des parties de AB. De plus, les points D et E tomberont ou pourront être censés tomber sur deux points de division de AB et de AC, puisque ces deux lignes sont partagées chacune en une infinité de parties. De même si, par tous les points de division de AC, on mene des droites paralleles à AB, elles partageront BC en une infinité de parties égales correspondantes aux parties des deux premieres lignes, et le point K sera ou pourra être censé l'un des points de division de BC. Maintenant, les parties finies AD, AE, BK, étant

des parties correspondantes des trois lignes AB, AC, BC, on a (146) cette suite de rapports égaux, AB : AD :: AC : AE :: BC : BK.

Réciproquement, si on a AB : AD :: AC : AE, la sécante DE sera parallele à BC. Car supposons pour un moment que la ligne qui, en partant du point D, seroit parallele à BC, vienne aboutir au point *e*, placé au-dessus ou au-dessous du point E, on auroit, par le Ier. cas, AB : AD :: AC : A*e*. Donc, puisqu'on a par hypothese AB : AD :: AC : AE, on auroit AC : A*e* :: AC : AE. Donc, à cause de AC = AC, on aura A*e* = AE. Ainsi le point *e* se confond avec le point E, et la droite DE est parallele à BC. On démontrera semblablement que de la proportion AC : AE :: BC : BK, résulte le parallélisme de EK avec AB.

148. *Corollaire I.* La droite DE étant supposée parallele à BC, et EK parallele à AB, on a (80) DE = BK. Donc, puisqu'on a AB : AD :: AC : AE :: BC : BK, on aura d'abord AB : AD :: AC : AE :: BC : DE, ou

I. AB : AC : BC :: AD : AE : DE.

Ainsi les trois côtés du triangle ABC sont proportionnels aux trois côtés du triangle ADE, qui se forme en menant DE parallele à la base BC.

Par la même considération, la droite EK étant parallele à la base du triangle CAB regardé comme ayant son sommet en C, on aura cette suite, CA : CB : AB :: CE : CK : EK, ou en faisant changer semblablement de place aux antécédents et aux conséquents,

II. AB : AC : BC :: EK : CE : CK.

Le second cas de ce corollaire auroit pu se démontrer directement par l'article 146.

149. *Corollaire II.* La suite II de l'article précédent nous donne AB : AC :: EK : CE, ou, en mettant pour EK sa valeur DB (80), AB : AC :: DB : EC. Et comme on a par la suite I, AB : AC :: AD : AE, il est clair qu'on aura la suite

AB : AC :: AD : AE :: DB : EC.

D'où l'on voit que la ligne entiere AB et ses parties déterminées par les paralleles DE, BC, sont proportionnelles à la ligne entiere AC et à ses parties déterminées par les mêmes paralleles.

On démontreroit semblablement qu'en menant (Fig. 98) tant d'autres lignes qu'on voudroit MN, PQ, SR, paralleles aux deux premieres DE, BC, on auroit
AB : AC :: AD : AE :: DB : EC :: AM : AN :: MB : NC :: DM : EN :: AP : AQ :: PB : QC :: , etc.

Ainsi en général si on coupe deux lignes qui concourent en un point par un nombre quelconque de paralleles, la premiere ligne et ses parties seront proportionnelles à la seconde ligne et à ses parties.

150. *Corollaire III.* Par là on divise une ligne donnée en parties proportionnelles à des lignes données ou à des nombres donnés. Soit, par exemple, la droite AB (Fig. 99) qu'il faut partager en parties proportionnelles aux lignes *ef*, *gh*, *ik*. Je mene, par le point A, la droite indéfinie AZ, qui fait avec AB un angle quelconque; je mets bout à bout sur la ligne AZ, à compter du point A, les droites *ef*, *gh*, *ik*, en A*m*, *mn*, *np*. Par le dernier point de division *p* je mene au point B la droite *p*B; et par les autres points *n*, *m*, je mene, parallèlement à *p*B, les droites *n*D, *m*C; ce qui partage la ligne AB en parties AC, CD, DB, proportionnelles aux lignes A*m* ou *ef*, *mn* ou *gh*, *np* ou *ik*.

On voit que si les lignes *ef*, *gh*, *ik*, sont égales, les parties AG, CD, DB, seront aussi égales.

151. *Corollaire IV.* Si on partage l'angle A du triangle ABC (Fig. 100) en deux parties égales par la droite AD, les parties BD, DC, de la base seront proportionnelles aux côtés AB, AC, c'est-à-dire qu'on aura BD : DC :: AB : AC. Car soit menée par le point B, et parallèlement à DA, la droite BE qui rencontre en E le côté CA prolongé; l'angle ABE sera égal à l'angle BAD (63), et l'angle BEA, égal à l'angle DAC. Donc, à cause de l'angle BAD = l'angle CAD, les deux angles ABE, BEA, sont

égaux. Donc (74) EA=AB. Maintenant, à cause des paralleles BE, DA, on a BD : DC :: EA : AC; ainsi, en mettant pour EA sa valeur AB, on aura BD : DC :: AB : AC.

152. Théorême III. *Si par un point* S (Fig. 101) *on mene à une droite* MN *un nombre quelconque de lignes* SM, SO, SP, SN, *et qu'on tire parallèlement à* MN *la droite* QT, *qui coupe ces lignes aux points* Q, R, V, T; *les parties de la ligne* QT *seront proportionnelles aux parties de la ligne* MN; *c'est-à-dire qu'on aura*

QR : MO :: RV : OP :: VT : PN,

ou bien QR : RV : VT :: MO : OP : PN.

Le triangle SMO étant coupé parallèlement à sa base par la droite QR, on a (148), QR : MO :: SR : SO.

De même, le triangle SOP donne SR : SO :: RV : OP :: SV : SP.

Le triangle SPN donne SV : SP :: VT : PN.

Or, dans la premiere et la seconde suite, il y a le même rapport; dans la seconde et la troisieme, il y a le même rapport; ainsi de suite. Donc, en ne prenant que les rapports dont on a besoin, on aura, QR : RV : VT :: MO : OP : PN.

153. *Remarque.* La même proposition a lieu lorsque la droite QT (Fig. 102) coupe les prolongements des droites MS, OS, PS, NS. Car si l'on prend sur SM la partie *Sq*=SQ, et qu'on mene *qt* parallele à MN, tous les triangles *Sqr*, *Sru*, *Sut*, seront parfaitement égaux chacun à chacun des triangles SQR, SRV, SVT, parceque d'un triangle à l'autre il y a un côté égal adjacent à deux angles égaux. Or, par le cas précédent, on a *qr* : *ru* : *ut* :: MO : OP : PN. Donc on aura QR : RV : VT :: MO : OP : PN.

154. *Corollaire.* De la suite QR : RV : VT :: MO : OP : PN, on peut conclure, par la théorie des proportions, QR+RV+VT : MO+OP+PN :: QR : MO :: RV : OP :: VT : PN; c'est-à-dire QT : MN :: QR : MO :: RV : OP :: VT : PN.

Ainsi les lignes entieres QT, MN, sont entre elles comme leurs parties correspondantes.

Ces mêmes lignes sont encore entre elles :: SQ : SM :: SR : SO ::, etc., parcequ'on a, QR : MO :: SQ : SM :: SR : SO ::, etc.

155. Théorème IV. *Si de deux points* M *et* P (Fig. 103) *de la droite* MP *s'élevent les lignes* MN, MR, PQ, PV, *paralleles deux à deux et proportionnelles, c'est-à-dire telles que* MN *soit parallele à* PQ, MR *parallele à* PV, *et qu'on ait la proportion* MN : PQ :: MR : PV ; *je dis que les trois lignes* MP, NQ, RV, *menées par les extrémités de ces paralleles, iront concourir en un même point* S.

Soit S le point de concours de MP et de NQ, et *s* le point de concours de MP et de RV. Le triangle SMN étant coupé parallèlement à sa base MN par la droite PQ, on a (148) SM : SP :: MN : PQ ; et le triangle *s*MR étant coupé parallèlement à sa base par la droite PV, on a de même, *s*M : *s*P :: MR : PV. Donc, puisqu'on a par hypothese, MN : PQ :: MR : PV, on aura SM : SP :: *s*M : *s*P. Donc on aura, *detrahendo*, SM — SP : SP :: *s*M — *s*P : *s*P, c'est-à-dire PM : SP :: PM : *s*P. Donc, à cause de PM = PM, on aura SP = *s*P. Ainsi les points S et *s* se confondent.

Finissons par appliquer cette théorie des lignes proportionnelles à quelques problèmes.

156. Problème I. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données* GH, IK, LM (Fig. 104).

Je mene deux lignes AV, AZ, qui forment entre elles un angle quelconque ; sur la premiere je porte GH de A en B, et IK de A en C ; sur la seconde je porte LM de A en E ; je joins les points B et E par la droite BE ; je lui mene la parallele CF, et la droite AF est la quatrieme proportionnelle cherchée. Car on a (147), AB ou GH : AC ou IK :: AE ou LM : AF.

157. *Corollaire.* On trouve par le même moyen une troisieme proportionnelle à deux lignes données. Car on n'a

qu'à supposer que les deux lignes IK, LM, sont égales, et faire d'ailleurs la même construction : on aura, AB ou GH : AC ou IK :: AE ou LM ou IK : AF ; ou bien, $\frac{1}{2}$ GH : IK : AF. Ainsi AF est la troisieme proportionnelle cherchée.

158. Problème II. *Déterminer la distance* BA (Fig. 105) *du point* B, *où l'on veut ouvrir la tranchée sur la capitale d'une demi-lune, à l'angle saillant* A *du chemin couvert.*

Le maréchal de Vauban donne ce problème dans son *Traité de l'attaque et de la défense des places*, page 56.

Tirez la ligne BC perpendiculaire à AB ; sur cette ligne portez un certain nombre de parties égales, qui soient, par exemple, chacune de 60 toises ; à l'un des points de division E placez un piquet, de maniere que EC soit une partie aliquote de BE, comme la moitié ou le tiers. Par le point C élevez, perpendiculairement à BC, la droite CD ; sur cette ligne prenez un point F qui soit dans l'alignement du piquet E et de l'angle saillant A ; mesurez CF, et vous aurez AB, en faisant (153 et 154) la proportion, CE : EB :: CF : BA, dont les trois premiers termes sont connus, et dont on connoîtra par conséquent le quatrieme, puisqu'il est égal au produit des deux moyens, divisé par le premier terme.

159. Problème III. *Mesurer la largeur* AO (Fig. 106) *d'une riviere.*

Ce problème peut se résoudre comme le précédent.

Sur l'alignement de deux points A et O, et à une distance connue BO du point O, plantez un piquet B ; élevez BC perpendiculaire à AB, et déterminez, comme dans le problème précédent, la ligne AB ; de cette ligne retranchez OB ; le reste OA sera la largeur de la riviere.

160. Problème IV. *Par un point donné* M (Fig. 107), *mener une ligne* PM, *qui tende au point de concours de deux lignes* AB, CD, *lorsque ce point est trop éloigné pour pouvoir être déterminé.*

Je mene, par le point M, la droite NR, qui rencontre

les lignes AB, CD, aux points N et R. Sur NR je construis un triangle équilatéral NSR; par un point quelconque Q, pris sur AB, je mene QV parallele à NR; je fais $Sq = QV$, et je tire qu parallele à NR; du point S au point M je mene SM, qui rencontre qu au point p; je porte qp en QP sur QV; par les points M et P je tire la droite MP: cette ligne tendra au point de concours des deux lignes AB, CD. Car on a (154), NR : qu :: SN : Sq. Donc, à cause de NR = SN, on aura, $qu = Sq = QV$. De plus on a MN : MR :: qp : pu, ou bien NM : MR :: QP : PV. Donc (155) les trois lignes MP, AB, CD, vont concourir en un même point.

161. Problème V. *Diviser une échelle en parties égales.* Nous allons donner d'abord la maniere de diviser une échelle quelconque en parties égales; puis nous expliquerons la construction de l'échelle de *mille parties*, ainsi appelée parcequ'elle sert à prendre la millieme partie d'une ligne donnée. Cette échelle est d'un usage très commode et très fréquent dans la réduction des plans.

Division d'une échelle quelconque en parties égales.

Supposons, par exemple, que la droite AB (Fig. 108) soit une échelle qui représente 1 toise, et qu'il faille déterminer sur cette échelle la partie AM qui doit représenter 1 pied. Il est clair que la question est de trouver une ligne qui soit la sixieme partie de AB. Pour cela je prends (150) sur la ligne indéfinie AZ, qui fait avec AB un angle quelconque, six parties égales; par le dernier point r de division je mene à l'extrémité B de l'échelle proposée la droite rB, et par le premier point m de division je mene mM parallele à rB: la partie AM est celle qu'on demande.

On opérera d'une maniere semblable pour toute autre échelle et toute autre division.

Construction de l'échelle de mille parties.

Sur une ligne indéfinie AB (Fig. 109) je porte dix parties

égales AO, O 100, etc., qui représentent chacune une certaine mesure, par exemple 100 pieds. Ainsi la ligne entiere AB représentera *mille* pieds.

Ayant construit sur la division extrême AO, comme côté, un quarré AODC, je divise chacun des quatre côtés de ce quarré en dix parties égales. Par tous les points de division des côtés OD, AC, je mene des lignes droites, qui sont nécessairement paralleles aux côtés OA, DC. Des points 0, 10, 20, 30, etc. du côté inférieur OA, je mene des lignes droites aux points 10, 20, 30, 40, etc. du côté supérieur DC: et l'échelle est construite. En voici l'usage et la démonstration sur un exemple qui rendra plus sensibles l'un et l'autre.

Supposons qu'il faille déterminer la ligne qui doit représenter 458 pieds. Il est clair d'abord que, sur ce nombre, les 400 pieds sont représentés par la partie O 400 de l'échelle. Reste à trouver la valeur des 58 pieds.

La largeur AC ou OD de l'échelle étant divisée en dix parties, il est clair que la partie *tu* de la ligne *t*1, qui répond au premier point 1 de division, est la centieme partie de OD ou de OA, puisque les triangles semblables OD 10, O*tu* donnent, OD : D10 :: O*t* : *tu*, c'est-à-dire $1 : \frac{1}{10} :: \frac{1}{10} : tu$. Cette partie *tu* exprime donc 1 pied; et la partie *mr* de la ligne *m*8, qui répond au point de division 8 de la largeur AC, exprimera conséquemment 8 pieds. Et comme *r*N ou O 50 exprime 50 pieds, il s'ensuit que la ligne *m*N exprime 58 pieds.

Ainsi les 458 pieds sont représentés par la somme des deux lignes O 400 et *m*N, ou par la seule ligne HN parallele à A 400.

SECTION II.

Caracteres de la similitude de deux triangles ; rapports de leurs périmetres ou portions de périmetres, et de leurs surfaces ou portions de surfaces.

162. Théorème I. *Deux triangles* ABC, DEF (Fig. 110), *sont semblables, lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

Suivant la définition générale qu'on a donnée (142) des figures semblables, deux triangles semblables doivent avoir tous les angles égaux chacun à chacun, et les côtés proportionnels autour de ces angles. Or deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun ont tous les angles égaux chacun à chacun (68). Reste donc seulement à démontrer que nos deux triangles équiangles ont les côtés proportionnels.

Mettez bout à bout (Fig. 111) les côtés homologues BC, EF, et disposez les angles homologues semblablement dans l'espace, c'est-à-dire, de maniere qu'ils soient tournés du même côté ; ensuite prolongez les côtés FD et BA jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G. On voit (63) que les droites CD, BG, sont paralleles, et que les droites FG, CA, sont paralleles. Donc (80) ACDG est un parallélogramme, et on a AG = ED, GD = AC. Or, à cause des paralleles BG, ED, on a (149), BC : EF :: GD ou AC : DF ; et de même, à cause des paralleles AC, GF, on a, BC : EF :: BA : AG ou ED. Ainsi on aura cette suite de rapports égaux, BC : EF :: AB : ED :: AC : DF. Donc nos deux triangles ont les côtés proportionnels autour des angles égaux. Ainsi ils sont semblables.

163. *Corollaire I.* Deux triangles isosceles sont semblables, lorsqu'ils ont seulement deux angles homologues égaux, c'est-à-dire, ou l'angle du sommet égal à l'angle du sommet, ou

l'un des angles de la base égal à l'un des angles de la base. Car, 1°. lorsque l'angle du sommet est égal à l'angle du sommet, la somme des deux angles de la base est égale à la somme des deux angles de la base, et par conséquent les demi-sommes sont égales. Donc les deux triangles sont équiangles, et par conséquent semblables.

2°. Lorsqu'un angle de la base est égal à un angle de la base, les deux autres angles des bases sont aussi égaux. Donc les deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun. Donc, etc.

On voit au premier coup-d'œil que tous les triangles équilatéraux sont semblables, parceque chacun de leurs angles est de 60 degrés.

164. *Corollaire II.* Deux triangles quelconques sont semblables lorsqu'ils ont les côtés paralleles chacun à chacun, parcequ'ayant les côtés paralleles, ils ont les angles égaux (63).

165. *Corollaire III.* De même deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun ; car soient les deux triangles ABC, DEF (Fig. 112), tels que DF est perpendiculaire à AC, ED prolongé est perpendiculaire à AB, et EF est perpendiculaire à BC prolongé : ces deux triangles sont équiangles. En effet, la somme des quatre angles du quadrilatere AMDN vaut quatre angles droits (72). Et comme les angles M et N sont droits, il s'ensuit que *ang.* CAB + *ang.* MDN = deux angles droits. Or (50) *ang.* MDN + *ang.* FDE = deux angles droits. Donc *ang.* FDE = *ang.* CAB. On démontrera de même, au moyen du quadrilatere OCMF, qui a deux angles droits, que l'angle F est égal à l'angle C. D'où il suit que nos deux triangles ont tous les angles égaux chacun à chacun, et sont par conséquent semblables.

On remarquera, au sujet de ces sortes de triangles, que les côtés homologues sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Nous observerons encore que la perpendicularité réci-

proque de tous les côtés des deux triangles est nécessaire pour pouvoir en conclure que ces deux triangles sont semblables. Si un triangle avoit seulement deux côtés perpendiculaires sur deux côtés d'un autre triangle, on ne pourroit pas conclure de là qu'ils sont semblables.

166. Théorême II. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels peuvent être représentés par les deux triangles ABC, ADE (Fig. 113), qui ont l'angle commun A, et dans lesquels on a la proportion, AB : AD :: AC : AE. Or, à cause de cette proportion, les bases BC, DE, sont paralleles (147, II. cas). Donc nos deux triangles ont tous les angles égaux chacun à chacun (63), et sont par conséquent semblables.

167. *Corollaire.* Si on suppose que le triangle BAC est isoscele ou équilatéral, et qu'ayant pris sur les côtés égaux AB, AC, prolongés s'il est nécessaire, les lignes AD, AE, égales entre elles, on mene la droite DE: le triangle DAE sera aussi isoscele ou équilatéral; car il sera semblable au triangle BAC, puisque ces deux triangles ont un angle égal ou commun, et les côtés proportionnels autour de cet angle.

168. Théorême III. *Deux triangles* ABC, GHK (Fig. 113 et 114), *sont semblables lorsqu'ils ont les côtés proportionnels chacun à chacun, c'est-à-dire, lorsqu'on a*, AB : GH :: AC : GK :: BC : HK.

Prolongez deux côtés quelconques AB, AC, de l'un des triangles, jusqu'à ce qu'ils deviennent égaux chacun à chacun des côtés qui leur correspondent dans la suite donnée, c'est-à-dire, de maniere qu'on ait AD = GH, AE = GK, et tirez DE: on aura, AB : AD :: AC : AE. D'où il suit (166) que les deux triangles ABC, ADE, sont semblables.

Ainsi ces triangles donnent, AB : AD :: BC : DE. Or (hyp.) on a AB : GH ou AD :: BC : HK. Donc on aura DE = HK. Par conséquent les deux triangles ADE, GHK, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux. Ainsi, puisque ADE est semblable à ABC, il s'ensuit que GHK est aussi semblable à ABC.

169. Problème. *Construire un triangle semblable à un triangle donné* ABC (Fig. 113).

Il y a trois manieres de résoudre ce problème, fondées sur les articles 162, 166, 168.

I. *Maniere.* Sur une droite EF (Fig. 110), donnée de grandeur ou prise arbitrairement, faites (108) en E et F les angles DEF, DFE, égaux chacun à chacun des angles ABC, ACB. Le triangle DEF sera semblable au triangle ABC (162).

II. *Maniere.* Prolongez, s'il est nécessaire, les côtés AB, AC (Fig. 113), du triangle donné ABC; et ayant pris sur AB la droite AD de grandeur donnée ou arbitraire, menez DE parallele à BC: le triangle ADE sera semblable au triangle ABC (166).

III. *Maniere.* Prenez une droite GH (Fig. 114) de grandeur donnée ou arbitraire, et cherchez (156) deux quatriemes proportionnelles, l'une aux trois lignes AB, AC, GH, l'autre aux trois lignes AB, BC, GH. Je suppose que GK et HK soient ces deux quatriemes proportionnelles: du point G comme centre, avec le rayon GK, décrivez un arc de cercle; du point H comme centre, avec le rayon HK, décrivez un second arc de cercle, qui coupera le premier en un point K; et le triangle GHK sera semblable au triangle ABC (168).

170. Théorême IV. *Les périmetres de deux triangles semblables* ABC, DEF (Fig. 115 et 116), *sont entre eux, comme leurs côtés homologues, c'est-à-dire qu'on a*, AB + BC + AC : DE + EF + FD :: AB : DE.

Puisque les deux triangles ABC, DEF, sont semblables,

on a cette suite de rapports égaux (142), AB : DE :: BC : EF :: CA : FD. Donc, par la théorie des proportions, AB + BC + CA : DE + EF + FD :: AB : DE.

On voit par la même théorie, que la somme de deux côtés du premier triangle est à la somme des deux côtés homologues du second, comme un côté quelconque du premier triangle est au côté homologue du second.

171. Théorême V. *Les surfaces de deux triangles semblables* ABC, DEF, *sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Le sens de cet énoncé est qu'il y a le même rapport entre la surface du triangle ABC et celle du triangle DEF, qu'entre la surface d'un quarré qui auroit, par exemple, AB pour côté, et celle d'un quarré qui auroit DE pour côté, les côtés AB et DE étant homologues l'un à l'autre. Ce qui s'exprime ainsi, ABC : DEF :: $(AB)^2 : (DE)^2$.

Pour le démontrer, des angles homologues A et D, abaissez les perpendiculaires AO, DQ, sur les côtés opposés. L'expression de la surface du triangle ABC est $\frac{BC \times AO}{2}$, et celle de la surface du triangle DEF, est $\frac{EF \times DQ}{2}$ (128). Or, les deux triangles rectangles AOB, DQE, qui ont tous les angles égaux chacun à chacun, et qui sont par conséquent semblables, donnent, AO : DQ :: AB : DE; et la similitude des deux triangles proposés, ABC, DEF, donne BC : EF :: AB : DE.

Ecrivons ces deux proportions l'une au-dessous de l'autre, et multiplions-les ensemble, terme à terme, nous aurons cette autre proportion, AO × BC : DQ × EF :: AB × AB ou $(AB)^2 : DE \times DE$ ou $(DE)^2$. Donc, en divisant les deux premiers termes par 2, ce qui n'en change pas le rapport, on aura, $\frac{AO \times BC}{2}$ ou ABC : $\frac{DQ \times EF}{2}$ ou DEF :: $(AB)^2 : (DE)^2$.

172. *Corollaire.* Les deux triangles partiels AOB, AOC,

qui composent la surface du triangle ABC, étant semblables chacun à chacun des triangles partiels DQE, DQF, qui composent la surface du triangle DEF, on aura ces suites de rapports égaux :

$AOB : DQE :: (AB)^2 : (DE)^2$,

$AOC : DQF :: (AC)^2 : (DF)^2 :: (AB)^2 : (DE)^2$.

D'où l'on voit que les surfaces des triangles partiels correspondants, dans lesquels les deux triangles ABC, DEF, sont divisés par leurs hauteurs, sont entre elles comme les quarrés de deux côtés homologues.

173. *Remarque.* Si les deux triangles ABC, DEF, sans être semblables, avoient cependant les deux angles B et E égaux, leurs surfaces seroient entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces angles égaux, c'est-à-dire, qu'on auroit, $ABC : DEF :: AB \times BC : DE \times EF$; car les deux angles B et E étant égaux, les deux triangles rectangles AOB, DQE, sont semblables à cause des angles O et Q égaux. Donc on a, $AO : DQ :: AB : DE$. Multipliant par ordre cette proportion, terme à terme, avec la suivante $\frac{BC}{2} : \frac{EF}{2} :: BC : EF$, on aura. $\frac{AO \times BC}{2}$ ou $ABC : \frac{DQ \times EF}{2}$ ou $DEF :: AB \times BC : DE \times EF$.

Il en est de même pour les parallélogrammes. Les surfaces de deux parallélogrammes qui ont un angle égal, sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal, parce qu'un parallélogramme est double d'un triangle de même base et de même hauteur, et que les touts sont entre eux comme leurs moitiés.

SECTION III.

Caracteres de la similitude de deux polygones; rapports de leurs périmetres ou portions de périmetres, et de leurs surfaces ou portions de surfaces.

174. Théorême I. *Deux polygones quelconques, semblables, sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement situés dans l'espace.*

Et réciproquement, *lorsque deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement situés dans l'espace, ils sont semblables.*

En effet, 1°. soient les deux polygones semblables ABCDE, FGHIK, (Fig. 117 et 118). Si on y prend deux points M et N, tels que menant aux angles homologues A et F, B et G, les droites MA et NF, MB et NG, les deux triangles MAB, NFG, soient semblables : qu'ensuite on tire à tous les autres angles des deux polygones les droites MC et NH, MD et NI, ME et NK : tous les autres triangles MBC et NGH, MCD et NHI, MDE et NIK, MEA et NKF, seront aussi semblables chacun à chacun ; car les angles B et G des deux polygones étant égaux, et les angles ABM, FGN, des deux triangles semblables MAB, NFG, étant égaux, il est clair qu'en retranchant les derniers angles des premiers, les angles restants MBC, NGH, seront égaux. De plus les triangles semblables MAB, NFG, donnent MB : NG :: AB : FG ; et, à cause de la similitude des deux polygones, on a AB : FG :: BC : GH. Donc MB : NG :: BC : GH. Ainsi les deux triangles MBC, NGH, qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables (166). On démontrera de même que les deux triangles MCD, NHI, sont semblables ; ainsi de suite. D'où l'on voit que nos deux polygones sont composés d'un

même nombre de triangles semblables, et qui ont leurs sommets placés en deux points correspondants M et N, ou qui sont semblablement situés dans l'espace.

2°. Réciproquement, si tous les triangles MAB, MBC, MCD, etc. sont semblables chacun à chacun des triangles NFG, NGH, NHI, etc. les deux polygones seront semblables ; car d'abord ces deux polygones auront évidemment tous leurs angles égaux chacun à chacun, puisque ces angles sont composés d'angles égaux. De plus les deux triangles semblables MAB, NFG, donnent, AB : FG :: MB : NG ; les deux triangles semblables MBC, NGH, donnent MB : NG :: BC : GH :: MC : NH ; les deux triangles semblables MCD, NHI, donnent MC : NH :: CD : HI :: MD : NI ; ainsi de suite. Donc, en ne prenant dans toutes ces suites, où il regne le même rapport, que les termes dont on a besoin, on aura AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: , etc. Ainsi les deux polygones ont les côtés proportionnels autour des angles égaux, et sont par conséquent semblables.

175. *Corollaire I.* Il peut arriver que les deux points M et N tombent sur les sommets de deux angles correspondants dans les deux polygones, par exemple, sur les points A et F : alors les deux polygones étant supposés semblables, tous les triangles dans lesquels on partagera le premier, en menant de l'angle A des diagonales à tous les autres angles, seront semblables chacun à chacun des triangles dans lesquels on partagera le second polygone, en menant de l'angle F des diagonales à tous les autres angles. Et réciproquement, si les triangles dont il s'agit sont semblables chacun à chacun, les deux polygones seront semblables.

176. *Corollaire II.* On voit par là qu'étant donné un polygone ABCDE, si on veut construire un second polygone FGHIK qui lui soit semblable, la question se réduira à partager le premier polygone en triangles de la maniere la plus commode, et de faire ensuite un polygone qui soit composé d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun de ceux du premier polygone proposé, et semblablement

disposés. Or, nous avons donné en général (169) la manière de faire un triangle semblable à un autre, et on est maître d'ailleurs de donner à un triangle telle situation qu'on voudra dans l'espace. Ainsi nous avons tous les moyens nécessaires pour construire un polygone semblable à un autre.

Les côtés du second polygone peuvent avoir tel rapport qu'on voudra avec ceux du premier : ce rapport sera celui qu'on aura établi d'abord entre les deux premiers côtés. Ainsi, par exemple, si l'on suppose que, AB et FG étant les deux premiers côtés homologues des deux polygones, on ait fait FG égal à la centième partie de AB, chacun des autres côtés du polygone FGHIK sera la centième partie du côté qui lui correspond dans le polygone ABCDE.

C'est sur ce principe qu'est fondé l'art de lever les plans. Le polygone ABCDE étant supposé représenter un terrain, on l'exprimera sur le papier en y construisant un polygone semblable FGHIK, dont les angles se déterminent au moyen d'un instrument appelé *rapporteur*, et dont les côtés ont une grandeur relative aux mesures prises sur le terrain, laquelle se détermine par l'*échelle*, comme il a été dit (29).

177. Théorème II. *Les circuits de deux polygones semblables* ABCDE, FGHIK, *sont entre eux comme leurs côtés homologues.*

Les deux polygones étant semblables, on a cette suite de rapports égaux, AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IK :: EA : KF. Donc, par la théorie des proportions, AB + BC + CD + DE + EA : FG + GH + HI + IK + KF :: AB : FG.

178. *Remarque.* Il est clair de même que la somme d'un nombre quelconque de côtés du premier polygone est à la somme d'un pareil nombre de côtés correspondants du second, comme un côté quelconque du premier est au côté homologue du second.

179. *Corollaire.* Deux circonférences de cercles sont entre elles comme leurs rayons. Car imaginons que les deux cercles

tient le même centre O (Fig. 119); qu'on inscrive dans l'un le polygone régulier ABCDE, etc., qu'on tire les rayons OA, OB, OC, etc., qui rencontrent la seconde circonférence aux points a, b, c, d, etc., et qu'on mene les cordes ab, bc, cd, etc.: les deux polygones ABCD, etc., $abcd$, etc., seront semblables, puisqu'ils seront composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, qui ont tous leur sommet au centre O, et pour bases les côtés des polygones. Donc AB + BC + CD + etc. : $ab + bc + cd +$ etc. :: AB : ab :: OA : Oa. Or, si l'on suppose que les nombres des côtés des polygones augmentent à l'infini, leurs contours se confondront avec les circonférences : donc les circonférences sont entre elles comme leurs rayons.

180. *Remarque.* On voit de même que deux portions correspondantes des deux circonférences, c'est-à-dire, deux portions AxB, ayb, comprises entre les côtés des mêmes angles, sont entre elles comme les rayons.

On appelle les portions correspondantes de deux circonférences, *arcs semblables.*

181. Théorême III. *Les surfaces des deux polygones semblables* ABCDE, FGHIK (Fig. 117 et 118), *sont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

Imaginons que des deux points correspondants M et N dans les deux polygones on a mené des lignes MA et NF, MB et NG, MC et NH, etc., à tous leurs angles homologues; les deux polygones seront composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés. Or, à cause de la similitude de ces triangles et de celle des polygones, on a ces différentes suites de rapports égaux,

MAB : NFG :: $(AB)^2 : (FG)^2$ (171) :: $(BC)^2 : (GH)^2$ (142),
MBC : NGH :: $(BC)^2 : (GH)^2$ :: $(CD)^2 : (HI)^2$,
MCD : NHI :: $(CD)^2 : (HI)^2$ :: $(DE)^2 : (IK)^2$,
MDE : NIK :: $(DE)^2 : (IK)^2$ :: $(EA)^2 : (KF)^2$,
MEA : NKF :: $(EA)^2 : (KF)^2$ :: $(AB)^2 : (FG)^2$.

Et comme dans toutes ces suites il regne évidemment le même rapport, nous en pourrons conclure celle-ci, où il n'entre que les termes dont nous avons besoin,

MAB : NFG :: MBC : NGH :: MCD : NHI :: MDE : NIK :: MEA : NKF.

Donc, MAB + MBC + MCD + MDE + MEA : NFG + NGH + NHI + NIK + NKF :: MAB : NFG :: $(AB)^2$: $(FG)^2$.

Or la premiere partie de cette proportion est la surface du premier polygone, et la seconde est la surface du second polygone. Donc ces surfaces sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues AB, FG.

182. *Remarque.* Pareillement les surfaces de deux portions correspondantes des deux mêmes polygones sont entre elles comme les quarrés de deux côtés homologues.

183. *Corollaire.* Les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons; car ces cercles (Fig. 119) peuvent être regardés comme des polygones réguliers semblables, qui ont une infinité de côtés, et qui sont composés de triangles semblables chacun à chacun, dont les rayons OA, O*a*, sont les côtés homologues.

184. *Remarque.* On voit semblablement que les surfaces de deux secteurs semblables OA*x*BO, O*ay*bO, sont entre elles comme les quarrés des rayons OA, O*a*, puisque ces secteurs sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun.

CHAPITRE III.

Propriétés particulieres du triangle rectangle; usage de ces propriétés.

185. Théorême I. DANS *tout triangle rectangle* BAC (Fig. 120), *le quarré* BCEG, *construit sur l'hypoténuse* BC, *est égal à la somme des quarrés* ABIH, ACKL, *construits sur les côtés* AB, AC, *ou, en d'autres termes*, $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$.

De l'angle droit A, abaissez sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AD, que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle rencontre GE en F; du même angle A, et de l'angle C, menez les droites AG, CI: les deux triangles ABG, IBC, sont parfaitement égaux (49); car AB = IB, BG = BC, et *l'angle* ABG = *l'angle* IBC, puisque chacun de ces angles est composé d'un angle droit et de l'angle ABC. Or (124) le triangle ABG est la moitié du rectangle DBGF qui a même base BG et même hauteur BD que lui; et le triangle IBC est la moitié du quarré ABIH, qui a même base IB et même hauteur AB que lui: donc les moitiés étant égales, les touts sont aussi égaux; c'est-à-dire que le rectangle DBGF est égal au quarré ABIH. On démontrera semblablement que le rectangle DCEF est égal au quarré ACKL: d'où il suit que le quarré BCEG est égal à la somme des quarrés ABIH, ACKL.

186. *Remarque*. Entre plusieurs autres manieres de démontrer ce théorême, en voici une qui est fort simple.

Les deux triangles rectangles BAC, BDA, sont semblables, puisqu'outre les angles droits égaux A et D, ils ont l'angle commun B. Donc BC : AB :: AB : BD; ce qui donne l'équation $BC \times BD = (AB)^2$. De même les deux triangles rectangles semblables CAB, CDA, donnent BC : AC :: AC : DC; et l'équation $BC \times DC = (AC)^2$. Ajoutant ensem-

ble ces deux équations, on aura $BC \times BD + BC \times DC = (AB)^2 + (AC)^2$, ou $BC \times (BD + DC) = (AB)^2 + (AC)^2$, ou enfin $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$.

187. *Corollaire I.* 1°. En tirant la racine quarrée de chaque membre de la derniere équation, on a $BC = \sqrt{[(AB)^2 + (AC)^2]}$. D'où l'on voit que pour trouver l'expression de la racine ou du côté d'un quarré égal à la somme de deux autres quarrés, il faut construire un triangle rectangle qui ait pour côtés contigus à l'angle droit les côtés de ces deux quarrés, et mener l'hypoténuse ; cette ligne sera l'expression demandée.

2°. De la même équation $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$, on tire $(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2$, et $AB = \sqrt{[(BC)^2 - (AC)^2]}$. D'où l'on voit que, pour avoir la racine ou le côté d'un quarré égal à la différence de deux autres quarrés, il faut construire un triangle rectangle qui ait pour hypoténuse le côté du plus grand de ces quarrés, et pour un de ces côtés le côté du second de ces mêmes quarrés : le troisieme côté sera la racine demandée.

188. *Corollaire II.* Le quarré BCEG, et les deux rectangles BDFG, DCEF, ayant même hauteur BG, sont entre eux (129) comme leurs bases BC, BD, DC ; c'est-à-dire qu'on a BCEG : BDFG : DCEF :: BC : BD : DC. Donc, à cause de BDFG = ABIH, et de DCEF = ACKL, on aura, BCEG : ABIH : ACKL :: BC : BD : DC. Ainsi le quarré construit sur l'hypoténuse, et les quarrés construits sur les deux autres côtés, sont entre eux comme l'hypoténuse et ses segments déterminés par la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse.

189. *Corollaire III.* Si dans un quarré MNPQ (Fig. 121), on mene la diagonale MP, elle partagera ce quarré en deux triangles rectangles isosceles MNP, MQP, parfaitement égaux ; et on aura $(MP)^2 = (MN)^2 + (NP)^2 = 2(MN)^2$. Donc $MP = MN \times \sqrt{2}$. D'où l'on tire la proportion, MP : MN :: $\sqrt{2}$: 1. Ainsi la diagonale du quarré est au côté dans le rap-

port de $\sqrt{2}$ à 1 : rapport qui est incommensurable en nombres, parcequ'on ne peut pas assigner de nombre rationel qui exprime exactement la racine quarrée de 2.

190. **Théorême II.** *Si d'un point quelconque* A (Fig. 122) *d'une demi-circonférence, on mene aux extrémités du diametre* BC, *les cordes* AB, AC, *et perpendiculairement au diametre la droite* AD (qu'on appelle ordonnée), *laquelle détermine les parties* BD, DC (qu'on appelle abscisses) :

1°. *Chaque corde sera moyenne proportionnelle entre le diametre et l'abscisse correspondante.*

2°. *L'ordonnée sera moyenne proportionnelle entre les deux abscisses.*

En effet, 1°. l'angle BAC étant droit (104), si l'on construit les quarrés BCEG, ABIH, ACKL, et qu'on prolonge la perpendiculaire AD, pour achever les rectangles BDFG, CDFE, on aura ABIH = BDFG, ou $(AB)^2 = BG \times BD = BC \times BD$; et par conséquent BC : AB :: AB : BD. De même, $(AC)^2 = BC \times DC$; et BC : AC :: AC : DC.

2°. Les deux triangles rectangles BDA, ADC, sont semblables l'un et l'autre au triangle rectangle total BAC dont ils font partie, puisqu'outre les trois angles droits égaux, chacun des deux triangles partiels a un angle aigu commun avec le triangle total. Donc les deux triangles partiels sont semblables entre eux, et donnent la proportion, BD : AD :: AD : DC ; ou l'équation $(AD)^2 = BD \times DC$.

Ce théorême contient la propriété caractéristique du cercle.

191. *Corollaire.* Le quarré du diametre et les quarrés des cordes AB, AC, sont entre eux comme le diametre et les abscisses BD, DC ; c'est-à-dire qu'on a la suite, $(BC)^2 : (AB)^2 : (AC)^2 :: BC : BD : DC$. Cette suite résulte des équations $(BC)^2 = BC \times BC$, $(AB)^2 = BC \times BD$, $(AC)^2 = BC \times DC$, qui ont au second membre le facteur commun BC.

Il en sera de même pour le quarré du diametre et ceux de tant de cordes qu'on voudra, terminées à ses extrémités ;

c'est-à-dire que si l'on mene encore les cordes MB, MC, OB, OC, et les ordonnées MN, OP, on aura,

$(BC)^2 : (MB)^2 : (MC)^2 :: BC : BN : NC$,

$(BC)^2 : (OB)^2 : (OC)^2 :: BC : BP : PC$.

Dans toutes ces différentes suites, il regne le même rapport, qui est celui de $(BC)^2$ à BC. Par conséquent nous en pouvons former cette suite, $(BC)^2 : (AB)^2 : (AC)^2 : (MB)^2 : (MC)^2 : (OB)^2 : (OC)^2 :: BC : BD : DC : BN : NC : BP : PC$. Ainsi le quarré du diametre et les quarrés des cordes qui partent de ses extrémités sont entre eux comme le diametre et les abscisses correspondantes.

On voit que cette propriété des cordes est fondée sur ce que la valeur du quarré de chaque corde a un facteur constant, qui est le diametre : les ordonnées n'ont pas de propriété analogue, parceque la valeur du quarré de chaque ordonnée a deux facteurs variables, savoir, les deux abscisses, lesquelles varient l'une et l'autre lorsque l'ordonnée varie.

192. Théorême III. *Si trois figures semblables forment, par leurs côtés homologues, l'hypoténuse et les côtés d'un triangle rectangle, la premiere figure sera égale à la somme des deux autres, et ces trois figures seront entre elles comme l'hypoténuse et ses segments.*

Car les figures semblables sont entre elles (181) comme les quarrés de leurs côtés homologues; elles ont donc les unes par rapport aux autres les mêmes propriétés que ces quarrés.

193. *Corollaire.* Comme les demi-cercles sont des figures semblables, on voit que si on a trois demi-cercles (Fig. 123) qui aient pour diametres l'hypoténuse BC, et les côtés AB, AC, du triangle rectangle BAC; le demi-cercle BCMB sera égal à la somme des deux autres demi-cercles BANB, CAOC; et que ces trois figures seront entre elles comme les lignes BC, BD, DC. On voit de plus que si on ôte les parties communes au premier demi-cercle et à chacun des

deux autres, il restera le triangle rectiligne BAC égal à la somme des deux *lunules* APBNA, AMCOA.

Lorsque le triangle rectangle BAC est isoscele, les deux lunules deviennent égales ; alors chacune d'elles vaut la moitié du triangle BAC, ou, ce qui revient au même, elles peuvent être regardées comme égales chacune à chacun des triangles rectangles (égaux) ADB, ADC : mais il faut bien remarquer que cette égalité des lunules avec les triangles dont il s'agit n'est démontrée que dans le seul cas où le triangle rectangle proposé BAC est isoscele.

Hypocrate de Chio est le premier qui ait donné cette détermination des lunules, qu'on appelle en conséquence *les lunules d'hypocrate*.

194. Problême I. *Trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données* BC, KH (Fig. 124).

Il y a deux manieres de résoudre ce problême, fondées l'une et l'autre sur l'article 190.

I. Maniere. Divisez (41) la plus grande BC des deux lignes proposées, en deux parties égales au point O ; de ce point comme centre, avec le rayon OB ou OC, décrivez un demi-cercle ; portez la seconde ligne KH de B en D ; par le point D élevez au diametre BC la perpendiculaire DA, qui rencontre la demi-circonférence au point A ; tirez la corde AB : cette corde est la moyenne proportionnelle cherchée.

II. Maniere. Mettez bout à bout les deux lignes proposées BC, KH ; sur leur somme BH (Fig. 125), comme diametre, décrivez un demi-cercle ; par le point C ou K, où les deux lignes s'unissent, élevez au diametre BH la perpendiculaire ou ordonnée CM : cette ligne est encore la moyenne proportionnelle cherchée.

195. Problême II. *Etant données plusieurs figures semblables, construire une nouvelle figure qui leur soit semblable, et qui soit égale à leur somme.*

Commencez par déterminer les lignes homologues des

figures proposées. Soient AB, AC (Fig. 126), les lignes homologues de deux de ces figures ; mettez ces deux lignes à angles droits, ce qui se fait en élevant à l'extrémité de l'une une perpendiculaire égale à l'autre ; tirez l'hypoténuse BC du triangle rectangle BAC ; sur BC, comme ligne homologue à AB et à AC, construisez (176) une figure semblable aux deux premieres : cette figure sera égale (192) à leur somme. Ainsi on aura d'abord une figure égale à la somme de deux autres. Soit CD la ligne d'une troisieme figure, homologue à AB, AC, BC ; mettez BC et CD à angles droits ; tirez l'hypoténuse BD du second triangle rectangle BCD ; sur BD, comme ligne homologue aux premieres lignes, construisez une nouvelle figure semblable aux précédentes ; elle sera égale à la somme des deux figures construites sur BC et sur CD, ou à la somme des trois figures construites sur AB, AC, CD. En continuant d'opérer toujours de même, on parviendra à construire une figure qui sera égale à la somme d'un nombre quelconque de figures semblables, et qui leur sera semblable.

196. *Remarque.* Comme toutes les lignes homologues dans les figures semblables sont proportionnelles, il faut profiter de la liberté qu'on a de choisir les lignes les plus commodes pour la construction. Si, par exemple, les figures à ajouter sont des cercles, les lignes les plus commodes pour la construction sont les rayons ou les diametres, et il conviendra de les y employer.

197. Problème III. *Etant données deux figures semblables, construire une troisieme figure semblable, égale à leur différence.*

Soient AB, BC (Fig. 127), les lignes homologues des deux figures proposées. Elevez à l'une des extrémités A de la plus courte ligne AB la perpendiculaire indéfinie AX : de l'autre extrémité B de AB, comme centre, avec le rayon BC, décrivez un arc de cercle qui coupe AX au point C ; tirez BC ; sur AC, comme ligne homologue à AB et à BC, construisez une figure semblable aux deux figures proposées :

elle sera égale à leur différence. Car le triangle BAC étant rectangle en A, la figure construite sur BC est égale à la somme des figures construites sur AB et sur AC (192); et par conséquent la figure construite sur AC est égale à la différence des figures construites sur BC et sur AB.

198. **Problème IV.** *Construire une figure semblable à une autre, et qui ait avec elle tel rapport qu'on voudra.*

Supposons que la figure proposée doive être à la figure demandée, comme le nombre entier quelconque p est au nombre entier quelconque q. Il peut arriver que l'on ait $p < q$ ou $p > q$; ce qui fait deux cas.

I. *Cas*, où $p < q$. Sur une ligne indéfinie AZ (Fig. 128), je porte, à compter d'un point fixe M, autant de lignes égales et de grandeur arbitraire, qu'il y a d'unités dans p, et autant des mêmes lignes qu'il y a d'unités dans q. Je suppose que MO représente la première somme, MN la seconde, ou qu'on ait la proportion, MO : MN :: p : q. Je décris, sur MN comme diametre, un demi-cercle; par le point O j'éleve perpendiculairement à MN la droite OB, qui coupe la demi-circonférence au point B; je tire les cordes BM, BN. Sur la premiere je prends la partie BC égale à l'une des lignes de la figure proposée; et ayant mené CD parallele à MN, je construis sur CD, comme ligne homologue à BC, une figure semblable à la figure proposée : cette nouvelle figure est la figure demandée. Car nommons X la figure proposée, Y la figure construite : on a (192), X : Y :: $(BC)^2$: $(CD)^2$ :: CK : CD. Or (154), CK : CD :: MO : MN :: p : q. Donc X : Y :: p : q. Ainsi Y est la figure demandée.

II. *Cas*, où $p > q$. Sur la ligne indéfinie AZ (Fig 129), je prends les deux parties MO, ON, telles que l'on ait MO : ON :: p : q. Je décris avec le diametre MN un demi-cercle; j'éleve OB perpendiculaire à MN, et je mene les cordes BM, BN. Sur la premiere je prends la partie BC égale à l'une des lignes de la figure proposée; et ayant mené CD parallele à MN, sur BD, comme ligne homologue à BC, je construis une figure semblable à la figure proposée : cette nouvelle figure est la figure demandée. Car,

nommant X la figure proposée, Y la figure construite, on a (192), $X : Y :: (BC)^2 : (BD)^2 :: CK : KD$. Or, $CK : KD :: MO : ON :: p : q$. Donc $X : Y :: p : q$. Donc Y est la figure demandée.

199. *Corollaire.* De là on voit la maniere de trouver la valeur d'une expression de cette forme $A \times \sqrt{\frac{p}{q}}$, dans laquelle A représente une ligne, p et q des nombres entiers quelconques ; car cette expression est la même que celle-ci $\sqrt{\frac{p}{q}A^2}$; et la question se réduit à trouver la racine ou le côté d'un quarré qui soit au quarré construit sur la ligne A, comme p est à q.

200. Problème V. *Etant données deux figures semblables* X, Z (Fig. 130 et 132), *construire une figure* Y (Fig. 131) *qui leur soit semblable et moyenne proportionnelle entre elles.*

Soient AB, CD, EF, trois lignes homologues dans les trois figures semblables X, Y, Z. On a (181) $X : Y : Z :: (AB)^2 : (CD)^2 : (EF)^2$. Donc, puisque Y est moyenne proportionnelle entre X et Z, ou qu'on a la proportion $X : Y :: Y : Z$, on aura $(AB)^2 : (CD)^2 :: (CD)^2 : (EF)^2$. Donc $AB : CD :: CD : EF$. Ainsi la question se réduit à trouver (194) une moyenne proportionnelle CD entre AB et EF, et à construire sur CD, comme ligne homologue à AB ou à EF, une figure semblable aux deux figures proposées ; opération qui s'exécutera par l'article 176.

201. *Corollaire.* La proportion continue $\div\div AB : CD : EF$, donne (théorie des proportions), $(AB)^2 : (CD)^2 :: AB : EF$, et $(EF)^2 : (CD)^2 :: EF : AB$. Donc, puisqu'on a $X : Y :: (AB)^2 : (CD)^2$, et $Z : Y :: (EF)^2 : (CD)^2$, on aura $X : Y :: AB : EF$, et $Z : Y :: EF : AB$. D'où l'on voit que, connoissant les lignes homologues AB, EF, des deux figures proposées, et l'aire d'une de ces figures, on connoîtra

l'aire de la figure moyenne, puisque cette aire est l'un des termes d'une proportion dont trois sont connus.

CHAPITRE IV.

Continuation du même sujet; valeur de certains quarrés relativement aux lignes ou portions de lignes sur lesquelles ils sont construits.

202. Théorême I. *Le quarré d'une ligne* BC (Fig. 133), *composée de deux parties* BD, DC, *est égal à la somme des quarrés de ces deux parties, plus au double produit de l'une par l'autre; c'est-à-dire que* $(BC)^2=(BD)^2+(DC)^2+2BD\times DC$.

Sur BC, comme diametre, décrivez le demi-cercle BAC; par le point D élevez la perpendiculaire DA, et tirez les cordes AB, AC. A cause des trois triangles rectangles BAC, BDA, ADC, on aura les équations,

$$(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2,$$
$$(AB)^2=(AD)^2+(BD)^2,$$
$$(AC)^2=(AD)^2+(DC)^2.$$

Mettant dans la premiere, pour $(AB)^2$ et $(AC)^2$, leurs valeurs tirées des deux autres, on aura $(BC)^2=(BD)^2+(DC)^2+2(AD)^2$. Mettant encore pour $(AD)^2$ sa valeur $BD\times DC$ (190), on aura $(BC)^2=(BD)^2+(DC)^2+2BD\times DC$.

203. *Corollaire.* L'équation précédente donne $(BD)^2=(BC)^2-(DC)^2-2BD\times DC$. Mettant dans le second membre pour BD sa valeur BC — DC, on aura $(BD)^2=(BC)^2-(DC)^2-2BC\times DC+2(DC)^2=(BC)^2+(DC)^2-2BC\times DC$.

D'où l'on voit que *le quarré d'une ligne* BD *égale à la différence de deux autres* BC, DC, *est égal à la somme des quarrés de ces deux lignes, moins le double produit de l'une par l'autre.*

Ainsi le quarré de la somme de deux lignes et le quarré de

la différence de deux lignes contiennent les mêmes parties, savoir, les quarrés de ces deux lignes, et le double produit de l'une par l'autre, et ne different que par le signe qui précede ce dernier produit.

204. Théorême II. *La différence des quarrés de deux lignes* DC, DB (Fig. 133), *est égale au produit de la somme de ces deux lignes, multipliée par leur différence; c'est-à-dire que*

$$(DC)^2 - (DB)^2 = (DC + DB) \times (DC - DB).$$

Mettez les deux lignes DC, DB, bout à bout; sur leur somme BC, comme diametre, décrivez un demi-cercle; par le point D élevez sur BC la perpendiculaire DA, et tirez les cordes AB, AC. On aura $(DC)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$; $(DB)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$. Donc, en mettant pour $(AC)^2$ et $(AB)^2$ leurs valeurs BC × DC et BC × DB (190), $(DC)^2 = DC \times BC - (AD)^2$; $(DB)^2 = DB \times BC - (AD)^2$; ce qui donne $(DC)^2 - (DB)^2 = DC \times BC - DB \times BC = BC \times (DC - DB) = (DC + DB) \times (DC - DB)$.

205. *Corollaire.* Lorsqu'une ligne BC (Fig. 134) est divisée en deux parties égales au point M, et en deux parties inégales au point N; le quarré de la moitié de cette ligne, moins le quarré de la partie comprise entre les deux points de division, est égal au produit des deux segments inégaux de la même ligne, c'est-à-dire $(BM)^2 - (MN)^2 = BN \times NC$. Car $(BM)^2 - (MN)^2 = (BM + MN) \times (BM - MN) = BN \times (BM - MN) = BN \times (CM - MN) = BN \times NC$.

206. Théorême III. *Si dans un triangle obtusangle* MQN (Fig. 135) *on abaisse de l'angle aigu* M *la perpendiculaire* MO *sur le côté opposé prolongé, on aura* $(MN)^2 = (MQ)^2 + (NQ)^2 + 2NQ \times QO$.

Les triangles rectangles MON, MOQ, donnent

$$(MN)^2 = (MO)^2 + (NO)^2,$$
$$(MO)^2 = (MQ)^2 - (QO)^2;$$

et (202) on a $(NO)^2 = (NQ)^2 + (QO)^2 + 2NQ \times QO$.
Donc $(MN)^2 = (MQ)^2 + (NQ)^2 + 2NQ \times QO$.

AVERTISSEMENT.

Dans ce qui suit, je représenterai, pour la facilité des calculs et de l'impression, le côté MN par une simple lettre A; le côté NQ par B; le côté QM par C; le segment QO par S. Ainsi l'équation précédente est la même chose que $A^2 = B^2 + C^2 + 2B \times S$.

207. *Corollaire I.* Cette équation donne $2B \times S = A^2 - B^2 - C^2$. Donc (en divisant tout par 2B), $S = \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}$, valeur du segment QO par le moyen des trois côtés du triangle.

Si l'on ajoute ensemble les lignes OQ, QN, et qu'on nomme S' leur somme, ou le grand segment ON, on aura $S' = B + S$; d'où résulte (en mettant pour S sa valeur), $S' = B + \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B} = \frac{B^2 + A^2 - C^2}{2B}$: expression où il n'entre que les côtés du triangle.

208. *Corollaire II.* Soit nommée P la perpendiculaire MO, ou la hauteur du triangle. Le triangle rectangle MOQ donnera $P^2 = C^2 - S^2$; équation dont le second membre, étant la différence de deux quarrés, a pour expression (204), $(C + S) \times (C - S)$. Ainsi, $P^2 = (C + S) \times (C - S)$. Substituant pour S sa valeur $\frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}$, on aura $P^2 = \left(C + \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}\right) \times \left(C - \frac{A^2 - B^2 - C^2}{2B}\right)$; ou (en réduisant les deux facteurs du second membre), $P^2 = \frac{(A^2 - B^2 - C^2 + 2B \times C) \times (C \times 2B - A^2 + B^2 + C^2)}{4B}$. Or, le facteur $A^2 - B^2 - C^2 + 2B \times C$ est la même chose que $A^2 - (B^2 + C^2 - 2B \times C)$; et dans cette expression. $B^2 + C^2 - 2B \times C$ est le quarré de $C - B$ (203); de sorte que

le facteur dont il s'agit est $A^2-(C-B)^2$, différence de deux quarrés : il devient donc enfin $(A+C-B)\times(A-C+B)$. Semblablement l'autre facteur $C\times 2B-A^2+B^2+C^2=(C^2+B^2+2B\times C)-A^2=(C+B)^2-A^2=(C+B+A)\times(C+B-A)$. Donc, en substituant les expressions de ces facteurs, on aura $P^2=\frac{(A+C-B)\times(A-C+B)\times(C+B+A)\times(C+B-A)}{4B}$. Tirant la racine quarrée, et changeant un peu l'ordre des facteurs on aura $P=\frac{\sqrt{[(A+B+C)\times(A+B-C)\times(A+C-B)\times(C+B-A)]}}{2B}$, expression de la perpendiculaire qui tombe ici hors du triangle.

209. Théorême IV. *Si, dans un triangle* MNQ (Fig. 136), *la perpendiculaire* MO, *abaissée de l'un des angles sur le côté opposé, tombe au dedans du triangle, on aura* (*en nommant* MN, A; NQ, B; MQ, C; OQ, S),

$$A^2=B^2+C^2-2B\times S.$$

En effet on a, à cause des deux triangles rectangles MON, MOQ,

$$(MN)^2=(MO)^2+(NO)^2;$$
$$(MO)^2=(MQ)^2-(OQ)^2.$$

D'un autre côté, NO étant la différence des lignes NQ, OQ, on a (203), $(NO)^2=(NQ)^2+(OQ)^2-2NQ\times OQ$.

Substituant pour $(MO)^2$ et $(NO)^2$ leurs valeurs, et mettant à la place des lignes les lettres qui les représentent, on trouvera $A^2=B^2+C^2-2B\times S$.

210. *Corollaire I.* Cette équation donne $2B\times S=B^2+C^2-A^2$. Donc $S=\frac{B^2+C^2-A^2}{2B}$, où il n'entre que les côtés du triangle.

Si on veut avoir l'autre segment ON, que je nomme S', on trouvera $S'=B-S=B-\left(\frac{B^2+C^2-A^2}{2B}\right)=\frac{B^2+A^2-C^2}{2B}$.

211. *Corollaire II.* En nommant P la perpendiculaire

MO, et opérant entièrement de même que dans l'article 208, on trouvera

$$p=\frac{\sqrt{[(A+B+C)\times(A+B-C)\times(A+C-B)\times(C+B-A)]}}{2B}$$

Par où l'on voit, en comparant les valeurs des deux perpendiculaires (Fig. 135 et 136), qu'elles sont entièrement semblables. De là nous pouvons former ce théorême : *La perpendiculaire abaissée d'un angle quelconque d'un triangle sur le côté opposé, prolongé s'il le faut, est toujours représentée par une fraction qui a pour numérateur la racine du produit de la somme des trois côtés du triangle, multipliée par les trois différences de la somme de deux côtés au troisieme côté, et pour dénominateur le double du côté sur lequel, ou sur le prolongement duquel, tombe la perpendiculaire.*

212. *Remarque.* Le tracé graphique d'un triangle montre aux yeux si la perpendiculaire abaissée d'un angle sur le côté opposé tombe au dehors ou au dedans du triangle. Mais on peut décider la même chose, *a priori*, par la connoissance des angles ou des côtés du triangle.

En effet, 1°. par rapport aux angles, je vois, par exemple, que dans le triangle MQN (Fig. 135), obtusangle en Q, la perpendiculaire MO, abaissée de l'angle M sur le côté opposé, doit tomber hors du triangle ; car la somme des trois angles du triangle MQN, est égale à la somme des trois angles du triangle rectangle MON : donc, puisque l'angle N est commun à ces deux triangles, et que l'angle obtus MQN est plus grand que l'angle droit MON, il faut nécessairement que l'angle NMQ soit moindre que l'angle NMO, ce qui détermine la perpendiculaire MO à tomber hors du triangle. Dans le triangle MNQ (Fig. 136), que je suppose avoir ses trois angles aigus, la perpendiculaire abaissée de l'angle M sur le côté opposé doit tomber en dedans du triangle, parceque l'angle N étant commun aux deux triangles MNQ, MON, et l'angle aigu Q étant

moindre que l'angle droit O, l'angle NMO doit être moindre que l'angle NMQ, et par conséquent MO tombe au dedans du triangle. On verra, par le même moyen, que la perpendiculaire abaissée d'un angle obtus, ou droit, doit tomber dans le triangle.

2°. Par rapport aux côtés, je vois que l'expression du segment OQ (Fig. 135 et 136) étant $\pm\frac{A^2-C^2-B^2}{2B}$, il suffira pour décider la question si la perpendiculaire tombera en dehors ou en dedans du triangle, il suffira, dis-je, d'examiner si $\frac{A^2-C^2-B^2}{2B}$ est une quantité positive ou négative. Dans le premier cas, la perpendiculaire tombe en dehors du triangle, et dans le second elle tombe en dedans.

213. Problème. *Déterminer l'aire d'un triangle par le moyen de ses trois côtés.*

En abaissant de l'angle M (Fig. 135 ou 136) la perpendiculaire MO sur le côté opposé, l'expression de l'aire du triangle est d'abord, $\frac{NQ\times MO}{2}$, ou $\frac{B\times P}{2}$ (128). Substituant dans cette expression, pour P, sa valeur trouvée (208 ou 211), on aura pour l'aire du triangle :

$$\frac{\sqrt{[(A+B+C)\times(A+B-C)\times(A+C-B)\times(C+B-A)]}}{4},$$

ou (en écrivant $\sqrt{16}$ pour 4, et observant que, dans toute fraction, le quotient de la racine du numérateur, divisé par la racine du dénominateur, est la racine même de la fraction),

$$\frac{\sqrt{[(A+B+C)\times(A+B-C(\times(A+C-B)\times(C+B-A)]}}{\sqrt{16}};$$

ou $\sqrt{[(\frac{A+B+C}{2})\cdot(\frac{A+B-C}{2})\cdot(\frac{A+C-B}{2})\cdot(\frac{C+B-A}{2})]}$;

ou (en conservant le premier facteur sous la forme qu'il a, changeant un peu celle des trois autres facteurs, et écrivant

$\frac{A+B+C}{2}$ — C pour le second, $\frac{A+B+C}{2}$ — B pour le troisieme, et enfin $\frac{A+B+C}{2}$ — A pour le quatrieme),

$$\sqrt{[(\tfrac{A+B+C}{2})\cdot(\tfrac{A+B+C}{2}-C)\cdot(\tfrac{A+B+C}{2}-B)\cdot(\tfrac{A+B+C}{2}-A]}.$$

D'où l'on voit que *l'aire de tout triangle rectiligne est égale à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, résultant de la multiplication de la demi-somme des trois côtés par les trois excès de cette demi-somme sur chacun des côtés du triangle.*

Supposons, par exemple, MN = 100 toises, MQ = 112 toises, NQ = 88 toises : on trouvera que la surface du triangle est de 4203 ^{1} toises quarrées, environ.

CHAPITRE V.

Propriétés de certaines lignes, par rapport au cercle.

214. Deux lignes AB, DE (Fig. 137), sont dites coupées *en parties réciproquement proportionnelles*, lorsque les deux parties AC, CB, de l'une sont les extrêmes ou les moyens d'une proportion, tandis que les deux parties DF, FE, de l'autre en sont les moyens ou les extrêmes, c'est-à-dire lorsqu'on a, AC : DF :: FE : CB, ou DF : AC :: CB : FE.

215. Deux lignes sont dites *réciproquement proportionnelles à leurs parties*, lorsqu'une ligne entiere et l'une de ses parties sont les extrêmes ou les moyens d'une proportion, tandis que l'autre ligne entiere et l'une de ses parties en sont les moyens ou les extrêmes, c'est-à-dire lorsqu'on a, AB. DE :: DF : AC, ou DE : AB :: AC : DF.

216. Une ligne est dite coupée *en moyenne et extrême raison*, lorsque l'une de ses parties est moyenne propor-

tionnelle entre la ligne entiere et l'autre partie. Ainsi, par exemple, la ligne AB sera coupée en moyenne et extrême raison au point C, si on a la proportion, AB : AC :: AC : CB.

Je n'ai pas besoin de faire observer, puisque la proportion le dit assez, que des deux parties AC, CB, la plus grande est AC.

217. Théorème I. *Deux cordes* AB, DE (Fig. 138), *d'un cercle, qui se coupent en* O, *se coupent en parties réciproquement proportionnelles; c'est-à-dire qu'on a*, AO : DO :: OE : OB.

Menez les cordes AE, BD. Les deux triangles AOE, DOB, sont semblables, parcequ'ils ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, comme il est aisé de le voir, en considérant qu'outre les angles opposés par le sommet en O, ils ont des angles qui, deux à deux, ont le sommet à la circonférence, et s'appuient sur les mêmes arcs. Ainsi on a la proportion énoncée, AO : DO :: OE : OB.

218. *Corollaire.* Supposons (Fig. 139) que la corde AB passe par le centre, ou qu'elle soit un diametre du cercle, et que la corde DE lui soit perpendiculaire. Alors (87) la corde DE est partagée en deux parties égales au point O; et la proportion AO : DO :: OE : OB, qui a toujours lieu, devient ici, AO : DO :: DO : OB. D'où l'on voit que l'ordonnée DO à un diametre est moyenne proportionnelle entre les deux abscisses de ce diametre.

Cette propriété a été démontrée autrement (190).

219. Théorème II. *Si d'un point* A, *extérieur au cercle* (Fig. 140), *on mene deux droites* AB, AD, *qui coupent chacune la circonférence en deux points, ces séantes seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures au cercle; c'est-à-dire qu'on aura*, AB : AD :: AE : AC.

Tirez les cordes BE, DC. Les deux triangles ABE, ADC, sont semblables; car ils ont l'angle commun A; de plus, les deux angles B et D, qui ont leurs sommets à la circonférence,

et qui s'appuient sur un même arc, sont égaux. Donc on a la proportion, AB : AD :: AE : AC.

220. *Corollaire I.* Imaginons que la sécante AB demeurant immobile, on fasse tourner l'autre sécante AD autour du point A, de maniere que, l'angle BAD s'agrandissant continuellement, le point D vienne enfin se confondre avec le point E (Fig. 141). Alors AD devient tangente au cercle, et on a AB : AD :: AD : AC. D'où l'on voit que, *si d'un même point on mene une sécante et une tangente à un cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entiere et sa partie extérieure au cercle.*

221. *Corollaire II.* Cette propriété de la tangente fournit une nouvelle maniere de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. En effet soient (Fig. 142) les deux lignes MN, KH, entre lesquelles il faut trouver une moyenne proportionnelle. Je porte la plus petite KH sur la plus grande de M en O ; sur la différence ON, comme diametre, je décris un demi-cercle OZN ; sur l'intervalle CM, compris entre le centre C de ce demi-cercle et le point M, comme diametre, je décris un autre demi-cercle MZC ; par le point M, et le point Z intersection des deux demi-circonférences, je tire la droite MZ. Cette ligne touche la demi circonférence OZN au point Z, parcequ'en menant le rayon CZ, l'angle MZC est droit (104), et que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon (93). Ainsi on a la proportion MN : MZ :: MZ : MO ou KH.

222. Problême. *Couper une ligne* MN (Fig. 143) *en moyenne et extrême raison.*

Élevez NO perpendiculaire à MN et égale à la moitié de cette ligne ; tirez MO ; prenez OP = ON, et MQ = MP : la ligne MN sera divisée en moyenne et extrême raison au point Q, c'est-à-dire qu'on aura MN : MQ :: MQ : QN. Car si du point O comme centre, avec le rayon ON ou OP, on décrit le cercle PNR, et qu'on prolonge MP jusqu'en R, on aura (220) la proportion, MR : MN :: MN : MP. Donc

(théorie des proportions), MN : MP :: MR — MN : MN — MP. Or MP = MQ, MR — MN = MR — PR = MP = MQ, MN — MP = MN — MQ = QN. Donc MN : MQ :: MQ : QN. Donc (216) la droite MN est coupée en moyenne et extrême raison au point Q.

223. *Corollaire.* Si on veut avoir les expressions des parties MQ, QN, par le moyen de la toute MN, on observera que $MQ = MP = MO - OP = \sqrt{\left[(MN)^2 + \frac{(MN)^2}{4}\right]} - \frac{MN}{2} = \frac{MN \times (\sqrt{5}-1)}{2}$; et que par conséquent, $QN = \frac{MN \times (3-\sqrt{5})}{2}$.

224. Théorème III. *Si de l'angle* A *d'un triangle* ABC (Fig. 144 et 145) *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur le côté opposé* BC, *prolongé s'il est nécessaire, on aura cette proportion : la base* BC *est à la somme* AB + AC *des deux autres côtés, comme la différence* AB — AC *des deux mêmes côtés est à la différence* BD — DC, *ou à la somme* BD + DC, *des segments de la base, selon que la perpendiculaire* AD *tombe au dedans, ou au dehors du triangle.*

Ce théorème peut être démontré par le moyen de l'article 217 ou 219. Je vais employer le premier moyen.

Du point A comme centre, et avec le plus grand côté adjacent AB pour rayon, je décris une circonférence qui rencontre en O la base BC prolongée; je prolonge CA de part et d'autre jusqu'à la circonférence. Cela posé, on a (217), BC : CM :: CN : CO. Or CM = CA + AM = CA + AB, CN = AN — AC = AB — AC; de plus, dans la Figure 144, CO = DO — DC = BD — DC, parceque (87) DO = BD; et, dans la Figure 145, CO = CD + DO = CD + BD. Ainsi la proportion BC : CM :: CN : CO devient

BC : AB + AC :: AB — AC : BD — DC (Fig. 144);
BC : AB + AC :. AB — AC : BD + DC (Fig. 145).

Si on vouloit démontrer ce théorême par le moyen de l'article 219, il faudroit décrire le cercle avec le plus petit côté AC.

225. *Corollaire.* Dans l'une et l'autre Figure le grand segment BD est la moitié de la somme des extrêmes de la proportion BC : CM :: CN : CO, et le petit segment CD est la moitié de leur différence ; car BO est la somme des extrêmes dont il s'agit. Or BD est la moitié de BO (87) ; et si on prend OH = BC, ce qui donne CH pour la différence des extrêmes, il est clair qu'à cause de BD = DO, le petit segment CD sera la moitié de CH.

On voit par-là que, connoissant les trois côtés d'un triangle, on aura les deux segments BD, CD, en cherchant le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers sont BC, AB + AC, AB — AC, et en prenant la moitié de la somme de ce quatrieme terme et du premier, ou la moitié de la différence de ce quatrieme terme et du premier.

On connoîtra que la perpendiculaire AD doit tomber en dedans ou en dehors du triangle, selon que le quatrieme terme, dont je viens de parler, sera plus petit ou plus grand que le premier BC.

Je ferai remarquer en passant qu'on peut déterminer, au moyen de ce théorême, les expressions des segments DC, DB, lesquelles seront les mêmes que celles qui se trouvent par les articles 207, 210.

226. Théorême IV. *Dans tout quadrilatere* ABCD (Fig. 146), *inscrit au cercle, le produit des deux diagonales* AC, BD, *est égal à la somme des produits des côtés opposés ; c'est-à-dire qu'on a*, AC × BD = AB × CD + BC × AD.

Menez de l'angle A la droite AO, qui fasse avec le côté AB l'angle BAO égal à l'angle DAC que fait l'autre côté AD avec la diagonale AC. Les deux triangles BAO, CAD, seront semblables, puisqu'outre les angles égaux BAO, CAD, les angles ABD, ACD, qui ont leurs sommets à la circonférence

et qui s'appuient sur un même arc, sont égaux. On a donc AB : AC :: BO : CD, et par conséquent AC × BO = AB × CD.

Les deux triangles AOD, ABC, sont semblables, puisqu'en retranchant des angles égaux CAD, BAO, le même angle OAC, il restera les angles égaux DAO, CAB, et que les angles ADO, ACB, qui ont leurs sommets à la circonférence et qui s'appuient sur un même arc, sont égaux. On a donc, AD : AC :: DO : BC, et par conséquent AC × DO = AD × BC.

Ajoutant cette équation, membre à membre, avec la précédente, on aura AC × BO + AC × DO = AB × CD + BC × AD, ou bien AC × (BO + DO) = AB × CD + BC × AD, ou enfin AC × BD = AB × CD + BC × AD.

Je ferai observer, en faveur de quelques lecteurs, que les côtés du quadrilatere inscrit peuvent être tels que la droite AO, au lieu de tomber au-delà de AC, comme dans notre *Figure*, tombe en-deçà : alors il faut *ajouter* l'angle OAC à chacun des deux angles égaux CAD, BAO ; le reste de la démonstration est toujours le même.

CHAPITRE VI.

Propriétés de certains polygones, par rapport au cercle.

227. Problème I. CIRCONSCRIRE *un cercle à un triangle, et déterminer le rayon de ce cercle par le moyen des côtés du triangle.*

1°. Circonscrire un cercle à un triangle ABC (Fig. 147, n°. 1), n'est autre chose que faire passer une circonférence de cercle par les trois points donnés A, B, C : problème qui se résout (90), en élevant sur les milieux des côtés AB, AC, les perpendiculaires MO, NO, qui se rencontrent en O, centre du cercle cherché.

2°. En menant le rayon OC, et abaissant de l'angle A la perpendiculaire AE sur BC, les deux triangles rectangles BEA, OKC, seront semblables; car, les angles droits E et K sont égaux; les angles B et O sont aussi égaux, parceque (103 et 101) ils ont chacun pour mesure l'arc CZ. Ainsi, on aura cette proportion, AE : CK :: AB : OC $= \frac{AB \times CK}{AE}$. Or, dans cette expression de OC, tout est connu, ou déterminable par le moyen des côtés du triangle; car AB est l'un de ses côtés, CK est la moitié du côté AC, et la perpendiculaire AE se détermine (211) par le moyen des trois côtés du triangle.

228. *Corollaire.* Supposons que le triangle proposé soit équilatéral (Fig. 147, n°. 2). Alors la perpendiculaire AE passe par le centre, tombe sur le milieu de BC; et on a CK ou $CN = CE = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2}$; $(AE)^2 = (AB)^2 - \frac{(AB)^2}{4} = \frac{3(AB)^2}{4}$, ou $AE = \frac{AB \times \sqrt{3}}{2}$. Donc OC ou OA ou $OB = \frac{AB}{\sqrt{3}}$: équation qui exprime la relation entre le côté du triangle équilatéral, et le rayon du cercle circonscrit.

229. Problème II. *Décrire un cercle qui passe par les sommets de trois angles donnés dans un polygone donné.*

Qu'il s'agisse, par exemple, de faire passer une circonférence de cercle par les trois angles F, B, D du polygone donné ABCDEF (Fig. 148): on voit qu'il ne faut, pour cela, que joindre les trois angles proposés, par les trois droites FB, FD, BD, et circonscrire un cercle au triangle FBD.

230. Problème III. *Inscrire un cercle dans un triangle, ou qui en touche les trois côtés; et trouver le rayon de ce cercle, par le moyen des trois mêmes côtés.*

1°. Divisez (109) deux angles A et B du triangle proposé ABC (Fig. 149), chacun en deux parties égales, par les droites AO, BO, qui se rencontrent en O; de ce point O,

abaissez les perpendiculaires OM, ON, OK, sur les trois côtés du triangle : ces trois lignes seront égales, et par conséquent chacune d'elles sera le rayon du cercle cherché. En effet, on voit d'abord que les deux triangles rectangles AMO, ANO, sont parfaitement égaux (50), puisque les trois angles de l'un sont égaux chacun à chacun des trois angles de l'autre, et qu'ils ont une hypoténuse commune AO. Ainsi OM = ON. De même, les deux triangles rectangles BMO, BKO, sont parfaitement égaux, et OM = OK. Donc OM = ON = OK. Donc, en décrivant un cercle, avec le rayon OM ou ON ou OK, on remplira la premiere condition du problème.

2°. Ayant abaissé de l'angle A la perpendiculaire AE sur le côté opposé BC, il est clair que le triangle ABC étant égal à la somme des trois triangles OAB, OBC, OAC, on aura $\frac{BC\times AE}{2}=\frac{AB\times OM}{2}+\frac{BC\times OK}{2}+\frac{AC\times ON}{2}$. D'où l'on tire (à cause de OM = OK = ON), $OM=\frac{BC\times AE}{AB+BC+AC}$. Or, dans cette expression, tout est donné ou déterminable par le moyen des côtés du triangle.

231. *Corollaire.* Supposons que le triangle soit équilatéral (Fig. 147, n°. 2). On aura AB + BC + AC = 3AB, $AE=\frac{AB\times\sqrt{3}}{2}$. Donc $OM=\frac{AB\times\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{AB}{2\sqrt{3}}$: équation entre le côté du triangle équilatéral et le rayon du cercle inscrit.

232. Problème IV. *Décrire un cercle qui touche trois côtés donnés dans un polygone donné.*

Si l'on veut, par exemple, que le cercle touche les trois côtés AB, CD, GH du polygone ABCDEFGH (Fig. 150), on prolongera les côtés AB, CD, GH, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent aux points *a*, *b*, *c*; et la question sera réduite à inscrire un cercle dans le triangle donné *abc*.

233. Théorème I. *Le côté* AB *de l'exagone régulier inscrit dans un cercle* (Fig. 151) *est égal au rayon de ce cercle.*

Tirez les rayons OA, OB. Dans le triangle AOB, l'angle O, qui a pour mesure l'arc AZB, sixieme partie de la circonférence, est de 60 degrés : ainsi la somme des deux autres angles A et B est de 120 degrés. Or, à cause de OB = OA, ces deux angles sont égaux (74). Donc chacun d'eux est de 60 degrés. Donc les trois angles du triangle AOB sont chacun de 60 degrés, et par conséquent le triangle est équilatéral. Donc AB = OA = OB.

234. *Corollaire.* Soit menée la corde BF, qui est évidemment perpendiculaire au diametre AOD : on aura (190) $AH = \frac{(AB)^2}{2AO} = \frac{AO}{2}$; et $HD = \frac{3}{2}AO$. Donc $(BH)^2 = AH \times HD = \frac{3(AO)^2}{4}$; et $(BF)^2 = 3(AO)^2$, ou $BF = AO \times \sqrt{3}$: équation qui exprime la relation entre la corde BF et le rayon AO.

235. Théorême II. *Le côté* AB *du décagone régulier inscrit dans un cercle* (Fig. 152) *est égal à la plus grande partie du rayon coupé en moyenne et extrême raison.*

Menez les rayons OA, OB, et partagez l'angle OBA en deux parties égales par la droite BM. Dans le triangle isoscele AOB, l'angle O du sommet a pour mesure la dixieme partie de la circonférence, ou la cinquieme partie de la demi-circonférence. Donc les deux autres angles ont chacun pour mesure les $\frac{2}{5}$ de la demi-circonférence, et par conséquent ils sont chacun double de l'angle O. Donc, puisque l'angle OBM est la moitié de l'angle OBA, il s'ensuit que le triangle OMB est isoscele, ou qu'on a MO = MB.

Maintenant, les deux triangles AOB, ABM, sont semblables ; car, outre que l'angle A leur est commun, les deux angles AOB, ABM, sont égaux. Ainsi on aura la proportion, OA : AB :: AB : AM. Or, à cause du triangle isoscele ABM, AB = BM ; et à cause du triangle isoscele OMB, BM = OM. Donc la proportion précédente devient OA : OM :: OM : MA. Ainsi (216) OM est la plus grande partie du rayon OA coupé en moyenne et extrême raison. Donc le

côté AB est égal à la plus grande partie du rayon coupé en moyenne et extrême raison.

236. *Corollaire I.* De là et de l'article 223, il suit que la relation entre le côté AB du décagone régulier et le rayon OA du cercle circonscrit est exprimé par l'équation $AB = \frac{OA \times (\sqrt{5}-1)}{2}$.

237. *Corollaire II.* Soit menée la corde BK : on aura $AH = \frac{(AB)^2}{2OA} = \frac{OA \times (3-\sqrt{5})}{4}$. Or $(BH)^2 = (AB)^2 - (AH)^2$; donc en substituant, pour $(AB)^2$ et $(AH)^2$, leurs valeurs, on trouvera $(BH)^2 = \frac{(OA)^2 \times (5-\sqrt{5})}{8}$; et $(BK)^2 = \frac{(OA)^2 \times (5-\sqrt{5})}{2}$; équation qui exprime la relation entre la corde BK et le rayon OA.

238. Théorème III. *Le quarré d'un côté* AB *du pentagone régulier* ABCDE (Fig. 153), *inscrit dans un cercle, est égal au quarré du rayon, plus au quarré du côté du décagone ; c'est-à-dire qu'en menant du point* A *au point* F, *milieu de l'arc* AFB, *la corde* AF *qui est le côté du décagone régulier, et tirant le rayon* OB, *on a* $(AB)^2 = (OB)^2 + (AF)^2$.

Menez la corde FB ; par le point Z, milieu de l'arc AZF, menez le rayon OZ qui rencontre AB au point M, et tirez MF qui sera nécessairement égale à MA (88). Les deux triangles isosceles AFB, AMF, qui ont un angle commun à la base, sont semblables (163) ; ils donnent par conséquent AB : AF :: AF : AM, proportion d'où l'on tire $AB \times AM = (AF)^2$.

Dans le triangle isoscele AOB, l'angle O du sommet, qui a pour mesure l'arc AFB, cinquieme partie de la circonférence, est de 72 degrés. Ainsi chacun des deux autres B et A, qui a pour mesure la moitié de ce qui reste de 180 degrés, après en avoir retranché 72, est de 54 degrés. Dans le triangle OMB, l'angle B est de 54 degrés ; l'angle O est

aussi de 54 degrés, parcequ'il a pour mesure l'arc BFZ, dont la premiere partie est de 36 degrés, et la seconde FZ de 18. Donc ce triangle OMB est isoscele et semblable au triangle AOB. Ainsi on aura la proportion, AB : BO :. BO : BM, ce qui donne $AB \times BM = (BO)^2$.

Ajoutant membre à membre les deux équations trouvées, on aura $AB \times AM + AB \times BM = (AF)^2 + (OB)^2$, ou $AB \times (AM + MB) = (AF)^2 + (OB)^2$, ou enfin $(AB)^2 = (AF)^2 + (OB)^2$.

239. *Corollaire I.* En substituant dans l'équation précédente à la place de $(AF)^2$ sa valeur $\frac{(OB)^2 \times (\sqrt{5}-1)^2}{4}$ (236), on trouvera $(AB)^2 = \frac{(OB)^2 \times (5-\sqrt{5})}{2}$: équation qui exprime la relation entre le côté AB du pentagone régulier et le rayon du cercle circonscrit.

240. *Corollaire II.* Menez la corde BE, et le diametre AOL : vous aurez $AH = \frac{(AB)^2}{2OA} = \frac{OB \times (5-\sqrt{5})}{4}$. Donc $(BH)^2 = (AB)^2 - (AH)^2 = \frac{(OB)^2 \times (5+\sqrt{5})}{8}$; et $(BE)^2 = \frac{(OB)^2 \times (5+\sqrt{5})}{2}$ équation entre la corde BE et le rayon OB du cercle circonscrit.

241. *Remarque.* En rapprochant les articles 233, 235, et 238, on peut inscrire au cercle l'exagone, le décagone et le pentagone réguliers, de la maniere suivante, qui est fort simple.

Menez le diametre LD (Fig. 154); élevez par le centre C le rayon CA perpendiculaire à LD ; divisez CD en deux parties égales au point E ; de ce point, avec EA pour rayon, décrivez un arc ANH qui rencontre le diametre LD au point H ; tirez la corde AH. Je dis que AC est le côté de l'exagone, CH celui du décagone, et AH celui du pentagone.

La premiere proposition est évidente (233). La seconde ne le sera pas moins, si du point E, avec le rayon EC, on décrit l'arc CF ; qu'ensuite du point A, avec le rayon AF, on décrive l'arc FG. Car alors (222) AG est la plus

grande partie du rayon coupé en moyenne et extrême raison. Et comme CH=AG, il s'ensuit (235) que CH est le côté du décagone.

Enfin la troisieme suit du théorême précédent, puisque le triangle rectangle ACH donne $(AH)^2=(AC)^2+(CH)^2$.

On pourroit faire des recherches semblables sur les polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés ; mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet qui est plus curieux qu'utile.

CHAPITRE VII.

Méthode pour trouver le rapport approché de la circonférence du cercle au diametre.

242. Lemme I. CONNOISSANT *le rayon* CA *d'un cercle* (Fig. 155), *et le côté* AB *d'un polygone régulier qui lui est inscrit, trouver l'expression de l'apothéme* CM *de ce polygone.*

La perpendiculaire CM divise le côté AB en deux parties égales (87). Ainsi on a $AM=\frac{AB}{2}$, et $(AM)^2=\frac{(AB)^2}{4}$. Le triangle rectangle AMC donne $CM=\sqrt{[(AC)^2-(AM)^2]}=\sqrt{[(AC)^2-\frac{(AB)^2}{4}]}$, expression dans laquelle tout est connu.

Supposons, par exemple, que AB soit le côté d'un exagone : on aura (233), AB=AC ; et par conséquent $CM=\sqrt{[(AC)^2-\frac{(AC)^2}{4}]}=AC\times\sqrt{[1-\frac{1}{4}]}=AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

243. Lemme II. *Connoissant le rayon du cercle et le côté* AB *d'un polygone régulier inscrit, trouver le côté* OA *ou* OB *du polygone régulier qui a deux fois plus de côtés.*

Prolongez le rayon OC vers K, jusqu'à la circonférence. On aura d'abord $CM=\sqrt{[(OC)^2-\frac{(AB)^2}{4}]}$, et par consé-

quent $OM = OC - CM = OC - \sqrt{[(OC)^2 - \frac{(AB)^2}{4}]}$. Or, $(OA)^2 = OK \times OM = 2OC \times OM$. Ainsi on aura $(OA)^2 = 2OC \times \left(OC - \sqrt{[(OC)^2 - \frac{(AB)^2}{4}]}\right)$; et par conséquent $OA = \sqrt{\left[2OC \times \left(OC - \sqrt{[(OC)^2 - \frac{(AB)^2}{4}]}\right)\right]}$, expression dans laquelle tout est connu.

Supposons, par exemple, que AB soit le côté d'un exagone : on trouvera $OA = OC \times \sqrt{[2 - \sqrt{3}]}$, expression du côté du *dodécagone* régulier inscriptible au même cercle. Par le moyen de ce côté, on calculera semblablement le côté du polygone régulier de 24 côtés : par le moyen de celui-ci, on calculera le côté du polygone régulier de 48 côtés ; ainsi de suite.

244. *Corollaire.* Le côté OA étant déterminé, on le multipliera par le nombre des côtés du polygone auquel il doit appartenir, pour avoir le contour de ce polygone ; et pour en avoir la surface, on cherchera (242) son apothême qu'on multipliera par la moitié du contour (136).

245. Lemme III. *Connoissant le côté* AB *d'un polygone régulier inscrit dans un cercle* (Fig. 156), *trouver le côté du polygone régulier circonscrit.*

Il est clair que AB étant le côté du polygone inscrit, celui du polygone circonscrit est la droite *ab*, qui touche l'arc AOB à son milieu O, et qui est terminée par les rayons CA, CB, prolongés. Les triangles rectangles semblables CMA, CO*a*, donnent $CM : CO :: AM : aO :: \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} ::$ $AB : ab$; et par conséquent $ab = AB \times \frac{CO}{CM}$. Le côté du polygone circonscrit est donc égal au produit du côté du polygone inscrit, multiplié par le rapport du rayon à l'apothême de ce dernier polygone.

246. *Corollaire.* Le contour entier du polygone circon-

scrit est égal au produit de son côté *ab* par le nombre des côtés qu'il doit avoir ; et sa surface est égale à la moitié du produit du contour par le rayon CO du cercle.

247. Problême. *Trouver le rapport, au moins approché, de la circonférence du cercle à son diametre.*

Je commence par observer que si l'on inscrit et circonscrit au cercle deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, chaque arc de cercle est plus grand que le côté du polygone inscrit, et plus petit que le côté du polygone circonscrit. En effet, soient AB, *ab*, deux côtés correspondants du polygone inscrit et du polygone circonscrit. D'abord (5) l'arc AOB est plus grand que sa corde AB ; d'un autre côté il est évident que le secteur CAOB est plus petit que le triangle rectiligne C*ab*, c'est-à-dire qu'on a (139 et 128), $\frac{\text{AOB} \times \text{CO}}{2} < \frac{ab \times \text{CO}}{2}$. Donc, à cause du facteur commun $\frac{\text{CO}}{2}$, on a AOB < *ab*.

Cela posé, 1°. inscrivons au cercle un polygone régulier dont nous connoissions le côté, par exemple, un exagone régulier, dont le côté est égal au rayon. Par le moyen de ce côté, nous calculerons (243) le côté du polygone régulier de 12 côtés ; par celui-ci, le côté du polygone régulier de 24 côtés ; par celui-ci, le côté du polygone régulier de 48 côtés ; par celui-ci, le côté du polygone régulier de 96 côtés ; ainsi de suite. En multipliant ainsi continuellement les divisions dans le rapport de 1 à 2, nous inscrirons au cercle des polygones dont les contours approcheront de plus en plus de sa circonférence. Mais quel que soit le nombre (fini) des côtés du polygone inscrit, le contour de ce polygone sera toujours moindre que la circonférence du cercle.

2°. Ayant déterminé le contour du dernier polygone régulier inscrit, c'est-à-dire, de celui auquel on s'arrête, nous chercherons (245) le contour du dernier polygone circonscrit qui lui correspond : ce contour sera plus grand que la circonférence. Ainsi nous aurons deux contours, l'un

plus petit, l'autre plus grand que la circonférence. Donc, en prenant un milieu entre eux, nous aurons à-peu-près la valeur de la circonférence; et cette valeur sera d'autant plus approchée, que le nombre des côtés des deux derniers polygones, inscrit et circonscrit, sera plus grand.

248. *Remarque I.* Nicole a trouvé par cette méthode (Mémoires de l'académie, année 1747), qu'en représentant le diametre du cercle par. . . . . 1000000000000000, le contour du polygone régulier inscrit, de 393216 côtés (*), étoit représenté par . . . . . 3141592653692928, Et celui du polygone régulier circonscrit, de pareil nombre de côtés, par. . . . . 3141592653795158. Prenant la moyenne arithmétique entre les contours de ces deux polygones, on aura. . . . . 3141592653744043, nombre qui exprime à-peu-près la circonférence du cercle.

Supprimons les cinq derniers chiffres de chacun des deux nombres qui expriment la circonférence et le diametre, et nous aurons la fraction $\frac{3141592653}{1000000000}$, pour exprimer encore à-peu-près le rapport de la circonférence au diametre. Le numérateur de cette fraction est un peu trop petit; mais on ne pourroit pas l'augmenter d'une unité sans le rendre trop grand.

249. *Remarque II.* Dans le *Traité d'Arithmétique*, en parlant des *fractions continues*, nous avons indiqué la fraction $\frac{3141592535}{1000000000}$ comme exprimant à-peu-près le rapport de la circonférence au diametre. Cette fraction, qui avoit été calculée long-temps avant Nicole par plusieurs mathématiciens, n'est pas tout-à-fait la même que la précédente, mais la différence est très légere. Son numérateur

(*) Remarquez que ce nombre est compris dans la progression géométrique, ÷ 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : etc. dont chaque terme est double du précédent.

est un peu trop petit ; mais on ne pourroit pas l'augmenter de trois unités sans le rendre trop grand.

Si on veut exprimer le rapport de la circonférence au diametre par de plus petits nombres, on procédera comme dans l'endroit cité de l'arithmétique ; et on trouvera qu'en représentant le diametre par 7, la circonférence est représentée par un nombre un peu moindre que 22 ; et qu'en représentant le diametre par 113, la circonférence est représentée par un nombre un peu plus petit que 355 ; etc.

Archimede est le premier inventeur du rapport $\frac{22}{7}$; Metius, mathématicien hollandais, celui du rapport $\frac{355}{113}$, qui approche beaucoup du véritable.

D'autres mathématiciens ont donné des déterminations plus ou moins exactes du rapport de la circonférence au diametre. Mais on n'a pas encore pu assigner le rapport exact et rigoureux de ces deux lignes.

250. *Corollaire I.* Tous les cercles étant des figures semblables, et par conséquent (179) leurs circonférences étant entre elles comme leurs rayons ou leurs diametres ; si on représente le diametre d'un cercle quelconque par m, sa circonférence par n, par D le diametre d'un cercle donné : la circonférence de ce dernier cercle sera représentée par $D \times \frac{n}{m}$; en sorte que, si on suppose $m = 7$, $n = 22$, la circonférence dont il s'agit sera $D \times \frac{22}{7}$.

251. *Corollaire II.* La surface d'un cercle étant égale (138) à la moitié du produit de son rayon par sa circonférence, ou au quart du produit du diametre par la circonférence, la surface du cercle de l'article précédent sera représentée par $\frac{D \times D \times \frac{n}{m}}{4}$, ou par $\frac{D^2}{4} \times \frac{n}{m}$, ou par πR^2, en nommant R le rayon, observant que $R^2 = \frac{D^2}{4}$, et représentant par la simple lettre π le rapport $\frac{n}{m}$ de la circonférence au diametre.

On voit par cette expression πR^2 que, *pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier le quarré de son rayon par le rapport de la circonférence au diametre.*

252. *Corollaire III.* Si on étoit supposé connoître la surface d'un cercle, et qu'il fallût en trouver le rayon, on auroit, en nommant S la surface donnée, $S = \pi R^2$. D'où l'on tire $R^2 = \frac{S}{\pi}$, et $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

CHAPITRE VIII.

De la transformation, multiplication, et division des figures.

253. Les recherches qui vont faire l'objet de ce chapitre peuvent être utiles dans la mesure et le partage des champs : c'est sous ce point de vue que les anciens géometres s'en sont occupés, dès l'origine de la géométrie. Nous ne nous étendrons pas beaucoup sur ce sujet ; mais comme tous ces problêmes sont à-peu-près de la même nature, ceux que nous allons résoudre suffiront pour mettre nos lecteurs en état d'aller plus loin, s'ils le jugent à propos.

254. Problême I. *Transformer un parallélogramme en un quarré, c'est-à-dire faire un quarré égal en surface au parallélogramme donné* ABCD (Fig. 157).

De l'angle A, j'abaisse AO perpendiculaire sur le côté opposé BC ; je cherche une moyenne proportionnelle entre la base BC et la hauteur AO ; le quarré construit sur cette moyenne proportionnelle, comme côté, sera celui qu'on demande, puisque dans une proportion continue le produit des extrêmes, qui est ici la surface du parallélogramme proposé ABCD, est égal au quarré du terme moyen.

Quant à la maniere de trouver la moyenne proportion-

nelle dont il s'agit, elle se réduit à ceci : sur BC, comme diametre, décrivez un demi-cercle ; portez AO de B en N ; par le point N élevez perpendiculairement à BC la droite NM ; et du point M, où cette ligne rencontre la demi-circonférence, au point B, tirez la corde MB. Cette corde est moyenne proportionnelle (190) entre BC et BN ou AO, et par conséquent elle est le côté du quarré cherché.

255. *Corollaire I.* Un triangle quelconque ABC (Fig. 158) étant la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, sa surface sera égale à celle d'un quarré qui a pour côté la moyenne proportionnelle entre sa base et la moitié de sa hauteur, ou entre la moitié de sa base et sa hauteur entiere.

Si on veut déterminer cette moyenne proportionnelle comme dans l'article précédent, on observera que si la base BC du triangle est plus grande que AX, moitié de sa hauteur, le cercle doit être décrit sur BC comme diametre ; mais que si, au contraire, AX étoit > BC, il faudroit décrire le cercle sur AX comme diametre.

256. *Corollaire II.* La surface d'un cercle étant égale à la moitié du produit de sa circonférence par le rayon (138), elle sera égale à celle d'un quarré qui auroit pour côté la moyenne proportionnelle entre le demi-rayon et la circonférence, ou entre le rayon et la demi-circonférence. Cette moyenne proportionnelle se trouveroit sans difficulté (190 ou 221) si l'on avoit la valeur exacte de la circonférence, et alors on résoudroit le problème de *la quadrature du cercle*, qui consiste à faire un quarré égal en surface au cercle. Mais la circonférence ne peut se trouver (247) que par approximation. Ainsi le problème de la quadrature du cercle n'est pas susceptible d'une solution rigoureuse.

257. Problème II. *Réduire une figure rectiligne quelconque en triangle.*

Nous pouvons faire cette transformation en conservant

l'un des angles du polygone, ou en faisant tomber la base du triangle cherché sur l'un quelconque des côtés du polygone.

I. CAS. Soit le polygone ABCDEF (Fig. 159), qu'il s'agit de transformer en un triangle qui ait avec lui l'angle B de commun. De l'un des angles voisins A, je mene des diagonales AE, AD, AC, aux angles E, D, C. Par le point F, je mene parallèlement à AE la droite FG, qui rencontre le côté DE prolongé, et je tire AG; ce qui me donne le triangle AGE, égal en snrface au triangle AFE (125), parceque ces deux triangles ont même base AE, et qu'ils sont compris entre les mêmes paralleles AE, FG. Nous pouvons donc substituer le triangle AGE au triangle AFE; et en ajoutant de part et d'autre le triangle AED, nous aurons, à la place de la figure partielle AFED, le triangle AGD. Par le point G, je mene, parallèlement à la seconde diagonale AD, la droite GH, qui rencontre en H le côté CD prolongé; ce qui donne le triangle AHD, égal au triangle AGD, parceque ces deux triangles ont même base AD, et qu'ils sont compris entre les mêmes paralleles. Ajoutant à chacun le triangle ADC, nous aurons le triangle AHC, égal en surface à la figure AGDC, ou à la figure partielle AFEDC. Par le point H, je mene, parallèlement à AC, la droite HK, qui rencontre BC en K; et je tire AK; ce qui donne le triangle AKC, égal en surface au triangle AHC. Ajoutant à chacun le triangle ACB, on aura le triangle AKB, égal en surface à la figure AHCB, ou à la figure proposée AFEDCB. On continueroit d'opérer de même si cette figure avoit un plus grand nombre de côtés.

II CAS. Supposons qu'il faille transformer le polygone ABCDEF (Fig. 160) en un triangle dont la base tombe sur le côté CD. Ayant mené les diagonales AE, AD, AC, je réduis d'abord, comme ci-dessus, la figure partielle AFEDC au triangle AHC, dont la base CH tombe sur le côté CD. Ensuite j'opere exactement de la même maniere pour la portion de figure qui est située à la gauche de la diagonale AC. Dans le cas présent, où cette portion est le simple triangle ABC, je mene par l'angle B, parallèlement à AC, la droite

BK, qui rencontre en K le côté DC prolongé, et je tire AK. Alors on a le triangle AKH égal en surface au polygone proposé.

258. Problème III. *Transformer le triangle* ABC (Fig. 161 ou 162) *en un autre qui ait son sommet en un point donné* D.

1°. Supposons que le sommet D du triangle cherché doive être placé sur le côté AB du triangle proposé ABC (Fig. 161). Tirez la droite DC; et ayant mené du sommet A, parallèlement à DC, la droite AE qui rencontre en E la base BC prolongée, menez DE: le triangle BDE sera égal en surface au triangle ABC. Car les deux triangles EDC, ADC, qui ont même base DC, et qui sont compris entre les mêmes paralleles DC, AE, ont des surfaces égales (125). Ajoutant à chacun le triangle DCB, on aura le triangle DBE égal en surface au triangle ABC.

On observera, par rapport à ce premier cas, que si le sommet du triangle demandé, au lieu de tomber entre les points A et B, tomboit sur le prolongement de BA, la construction seroit encore la même. Nous pouvons alors, en nous servant de la même Figure, considérer le triangle DBE comme le triangle principal; et en menant du point A au point E la droite AE, du point D la droite DC parallele à AE, et du point A au point C la droite AC, le triangle ABC sera égal au triangle DBE.

2°. Si le point D (Fig. 162) est placé hors du côté AB, menez, par le point B et le point D, la droite indéfinie BDF; par le point A, menez parallèlement à BC la droite AF, qui rencontre BF au point F, et tirez FC. Vous aurez le triangle FBC égal en surface au triangle ABC. Maintenant le point D est placé sur le côté FB; et la question est réduite à transformer par le premier cas le triangle FBC en un autre qui ait son sommet au point D. Il faut donc tirer DC, mener FE parallele à DC, et tirer DE; ce qui donne le triangle DBE, égal en surface au triangle FBC, ou au triangle ABC.

On fera la même remarque que ci-dessus, pour le cas où le point D tomberoit sur le prolongement de BF.

259. *Corollaire.* Tout polygone peut être transformé en un triangle qui ait telle hauteur qu'on voudra. Car, après avoir réduit ce polygone en un triangle qui ait les conditions mentionnées dans l'article 257, nous pouvons transformer, par la méthode de l'article précédent, ce triangle en un autre qui ait son sommet placé en un point quelconque.

260. Problème IV. *Construire un triangle dont la surface soit multiple de la surface d'une figure donnée, dans tel rapport qu'on voudra.*

Commencez par réduire (257) la figure donnée en un triangle. Je suppose que ABC (Fig. 163) soit ce triangle; je prends dans la direction BC la droite BM telle que BC soit à cette ligne BM comme la figure donnée ou le triangle ABC est au triangle cherché; et je tire AM; ce qui me donne ABM pour le triangle cherché. Car les deux triangles ABC, ABM, qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases BC, BM (129), lesquelles sont dans le rapport donné.

261. Problème V. *Transformer un triangle* ABC (Fig. 164) *en un autre qui soit semblable au triangle donné* FEG (Fig. 165).

Soit AO la hauteur du triangle ABC. Je fais EI = BC; par le point E j'éleve, perpendiculairement à EG, la droite EH = OA; je mene HK parallele à EG, et du point K je tire au point I la droite KI; ce qui me donne le triangle KEI égal en surface au triangle ABC, puisque ces deux triangles ont bases égales et hauteurs égales. Du point K, je mene KL parallele à FG; et ayant déterminé (190) une moyenne proportionnelle EM entre EL et EI, je mene MN parallele à GF, et je dis que le triangle EMN est celui qu'on demande. Car d'abord ce triangle est semblable au triangle EGF; reste donc seulement à démontrer qu'il est égal en surface au triangle EIK.

Les deux triangles ELK, EMN, étant semblables, on a (171), ELK : EMN :: $(EL)^2 : (EM)^2$. Or, puisque, par hypothese, on a la proportion continue, $\div\div$ EL : EM : EI, on

aura (Théorie des proportions), $(EL)^2 : (EM)^2 :: EL : EI$. Donc, $ELK : EMN :: EL : EI$. Les deux triangles ELK, EIK, qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases (129). Ainsi, $EL : EI :: ELK : EIK$. Donc, $ELK : EMN :: ELK : EIK$. Donc, à cause des antécédents égaux, les conséquents seront aussi égaux. Ainsi, $EMN = EIK$.

262. Problème VI. *Transformer un triangle donné en un polygone semblable à un polygone donné.*

Soit le triangle donné X (Fig. 166) qu'il s'agit de convertir en un polygone semblable au polygone ABCDEF (Fig. 167). Je transforme, par le Ier. cas de l'article 257, le polygone dont il s'agit en un triangle ABK, qui a l'angle B et le côté AB communs avec lui. Ensuite je transforme, par l'article précédent, le triangle X en un triangle BMN semblable au triangle BAK. De l'angle B, je mene aux angles F, E, D, du polygone AFEDCB, les diagonales BF, BE, BD. Par le point M, je mene MP parallele à AF; par le point P, PQ parallele à FE; par le point Q, QR parallele à ED; par le point R, RS parallele à DC. D'où l'on voit que les deux polygones BCDEFA, BSRQPM, sont semblables, puisqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. On aura donc cette proportion (181), $BCDEFA : BSRQPM :: (BA)^2 : (BM)^2$. Mais, à cause des triangles semblables BAK, BMN, on a (171), $(BA)^2 : (BM)^2 :: BAK, BMN$. Donc on aura, $BCDEFA : BSRQPM :: BAK : BMN$. Or, les antécédents de cette proportion sont égaux par hypothese. Donc les conséquents le sont aussi. Ainsi le polygone BSRQPM, qui est semblable au polygone BCDEFA, est de plus égal au triangle BMN, ou au triangle X.

263. *Corollaire.* Un polygone étant donné, on peut en construire un autre qui en soit multiple dans tel rapport qu'on voudra, et qui de plus soit semblable à un polygone donné. Car, après avoir trouvé (260) un triangle ABM (Fig. 163) qui soit multiple du polygone donné, dans la raison donnée,

il ne s'agira plus que de transformer, par la méthode de l'article précédent, le triangle ABM en un polygone semblable à un polygone donné.

264. Problême VII. *Diviser un triangle* ABC (Fig. 168 ou 169) *en plusieurs parties égales, en faisant partir les lignes de division d'un point donné.*

Qu'il s'agisse, par exemple, de partager le triangle ABC en trois parties égales par des lignes qui partent du point D placé sur le côté AB. Je transforme (258) le triangle ABC en un autre DBE qui ait son sommet au point D. Ensuite, ayant partagé (145) la nouvelle base BE en trois parties égales BF, FG, GE, je mene les droites DF, DG; ce qui me donne les trois triangles égaux en surfaces, DBF, DFG, DGE, comme ayant bases égales et même hauteur. Ainsi, chacun d'eux est le tiers du triangle DBE, ou du triangle ABC. Dans la Figure 168, où le point G tombe entre les points B et C, les deux triangles DBF, DFG, font partie du triangle ABC; et par conséquent la partie restante DGCA est le tiers de ce triangle. Dans la Figure 169, où le point G tombe au-delà du point C, il n'y a que le triangle DBF qui fasse entièrement partie du triangle ABC. Alors il faut mener la droite DC; par le point G, la droite GK parallele à DC; et du point D au point K, la droite DK. Cette construction rend le triangle DKC égal au triangle DGC, puisque ces deux triangles ont même base DC, et qu'ils sont compris entre les mêmes paralleles. Ajoutant à chacun le triangle DCF, on aura le quadrilatere DFCK égal au triangle DFG. Ainsi ce quadrilatere est le tiers du triangle DBE, ou du triangle ABC; et par conséquent le triangle restant ADK en est aussi le tiers.

Si le point D n'étoit pas placé sur le côté AB, ni sur son prolongement, on commenceroit par transformer, par le IIe. cas de l'article 258, le triangle proposé en un autre dont un côté, prolongé s'il étoit nécessaire, passât par le point D; ensuite on opéreroit, par rapport à ce nouveau triangle, comme on vient de le faire par rapport au triangle ABC.

265. *Corollaire.* Soit la figure ABCDEF (Fig. 170) qu'il faut partager, par exemple, en trois parties égales, par des lignes qui partent du point G placé sur le côté AB. Je commence par transformer (257, Ier cas), le polygone ABCDEF en un triangle ABH, qui ait un angle B et un côté AB communs avec ce polygone. Ensuite je convertis (258, Ier. cas) ce triangle en un autre GBK, qui ait son sommet au point G, et qui conserve l'angle B. Je partage la base BK en trois parties égales BM, MN, NK, et je tire les droites GM, GN. Par-là, j'ai les trois triangles GBM, GMN, GNK, qui sont égaux en surface, et qui sont par conséquent chacun le tiers du triangle GBK, ou du triangle ABH, ou du polygone ABCDEF. Le premier, GBM, fait partie de ce polygone. Le point N étant placé en delà de C, je tire la droite GC, et par le point N je lui mene la parallele NR qui rencontre CD au point R; du point G au point R, je tire la droite GR. Alors les deux triangles GCR, GCN, sont égaux en surface, comme ayant la même base GC, et étant compris entre les mêmes paralleles GC, NR. Ajoutant à chacun le même triangle GMC, on aura le quadrilatere GMCR égal en surface au triangle GMN. Ainsi ce quadrilatere est le tiers du polygone ABCDEF, et par conséquent la partie restante AGRDEF de ce polygone en est encore le tiers. Les trois parties égales de ce polygone sont donc le triangle GBM, le quadrilatere GMCR, et le polygone partiel AGRDEF.

CHAPITRE IX.

De quelques questions qui concernent les Maxima *et les* Minima *dans les figures.*

266. Il y a des quantités qui vont sans cesse en augmentant ou en diminuant : du premier genre sont les termes de la progression géométrique ascendante ∴ 1 : 2 : 4 : 8 : etc. ; du second sont les termes de la progression géomé-

trique décroissante ∴ 27 : 9 : 3 : 1 : $\frac{1}{3}$: etc. Mais il y a d'autres quantités (et ce sont celles dont il est ici question) qui, après avoir augmenté jusqu'à un certain point, vont ensuite en diminuant, ou qui, après avoir diminué, vont ensuite en augmentant. Soit, par exemple, le demi-cercle AOB (Fig. 171), dont AB est le diametre : les ordonnées MP vont en augmentant depuis A jusqu'en O, ensuite en diminuant depuis O jusqu'en B; la plus grande est le rayon OC. Au contraire, si l'on mene la droite ED parallele au diametre AB, et terminée par les perpendiculaires AE, BD; les droites MQ vont en diminuant depuis A jusqu'en O, ensuite en augmentant depuis O jusqu'en B; la plus petite de ces lignes est celle OR qui tombe sur le rayon CO prolongé.

Une quantité qui est ainsi, parmi toutes celles de son espece, *la plus grande*, ou *la plus petite* possible, s'appelle un *maximum* ou un *minimum*.

267. Deux figures dont les périmetres ou contours sont égaux s'appellent *figures isopérimetres*.

268. Théorême I. *De tous les rectangles* AC × CB, AD × DB (Fig. 172), *que l'on peut construire sur les deux parties d'une ligne* AB *comme côtés contigus à un même angle, le plus grand, ou le* MAXIMUM, *est le quarré, c'est-à-dire le rectangle dont les côtés* AC, CB, *sont égaux.*

Le point C étant le milieu de AB, on a (204), $(AC)^2 - (CD)^2 = AD \times DB$. D'où l'on voit que le quarré (AC) surpasse le rectangle AD × DB du quarré $(CD)^2$. Ainsi le quarré $(AC)^2$ est un *maximum*, parmi tous les rectangles que l'on peut former avec les deux parties d'une ligne.

269. *Corollaire.* Donc, parmi tous les rectangles *isopérimetres*, le quarré a la plus grande surface. J'entends que si on a un quarré ACBM (Fig. 173), et un rectangle ADBN (Fig. 174), qui aient des périmetres égaux, la surface du quarré est plus grande que celle du rectangle. Car, en représentant par la même ligne AB (Fig. 172), la moitié

du périmetre du quarré ou du rectangle, et désignant les mêmes lignes par les mêmes lettres dans les trois figures, on a, par l'article précédent, $(AC)^2 > AD \times DB$.

270. Problème I. *Trouver sur la base* AB *d'un triangle donné* AGB (Fig. 175) *un point* C *tel qu'en abaissant sur les deux autres côtés* GA, GB, *les perpendiculaires* CK, CH, *le rectangle* CK × CH *soit un* maximum.

Le point cherché est le milieu de AB, en sorte que si de tout autre point D on abaisse sur GA, GB, les perpendiculaires DF, DE, on aura CK × CH > DF × DE; car les triangles semblables ACK, ADF, donnent AC : AD :: CK : DF; et les triangles semblables BCH, BDE, donnent CB ou AC : BD :: CH : DE. Multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $(AC)^2$: AD × DB :: CK × CH : DF × DE. Or, (268), le point C étant le milieu de AB, on a $(AC)^2 > AD \times DB$. Donc aussi alors CK × CH > DF × DE.

271. Problème II. *Inscrire dans un triangle* GAB (Fig. 176) *le plus grand rectangle possible.*

La question se réduit à trouver sur l'un AB des côtés du triangle proposé un point C, qui soit tel que, menant CK perpendiculaire, et CH parallele au côté GA, ensuite HM parallele à CK, le rectangle CKMH ou CK × CH soit plus grand que tout autre rectangle DFNE ou DF × DE, que l'on formeroit en menant de tout autre point D la droite DF perpendiculaire, la droite DE parallele à AG, et la droite EN parallele à DF. Or, le point cherché est le milieu C de AB; ce qui se démontre comme l'article précédent, en considérant que les deux triangles ACK, ADF, sont semblables, et que les deux triangles BCH, BDE, sont semblables. D'où résulte la proportion composée $(AC)^2$: AD × DB :: CK × CH : DF × DE; par laquelle on voit que le point C étant le milieu de AB, le rectangle CK × CH est un *maximum*.

272. Problème III. *Deux points* A *et* B (Fig. 177) *étant*

donnés hors d'une ligne MN, *trouver sur cette ligne un point* C, *tel que, menant les droites* AC, CB, *leur somme* AC + CB *soit un* minimum.

Du point A j'abaisse sur MN la perpendiculaire AK, que je prolonge de la quantité KH = KA; par le point H et le point B je tire la droite HCB, qui rencontre MN au point cherché C; de sorte que si l'on mene la droite CA, la somme AC + CB est un *minimum*. En effet menons de tout autre point D pris sur MN les droites DA, DB, et tirons DH. La droite AH étant perpendiculaire sur MN, réciproquement MN est perpendiculaire à AH (35). Donc, à cause de KH = KA, on aura (37) CA = CH, DA = DH. Donc AC + CB = HB, et AD + DB = DH + DB. Or, (5) HB < DH + DB. Donc aussi AC + CB < AD + DB.

273. *Corollaire.* A cause des deux triangles rectangles AKC, HKC, parfaitement égaux, les angles ACK, HCK, sont égaux. Or, l'angle HCK = l'angle BCD (36) : donc les deux angles ACK, BCD, que forment les lignes AC, BC, avec la droite MN, sont égaux lorsque AC + CB est un *minimum*.

Supposons que MN représente l'une des bandes d'un billard, A et B deux billes, dont l'une A doit aller frapper l'autre B par *bricole*; c'est-à-dire, en venant toucher la bande MN; le point C, où la bille A doit venir toucher la bande MN, se déterminera par la construction de l'article précédent, parceque la bille A se réfléchit en faisant l'angle *de réflexion* BCN égal à l'angle *d'incidence* ACM.

274. Théorême II. *De tous les triangles* AMB, ANB (Fig. 178), *qui ont pour base une même corde* AB *d'un cercle, et leurs sommets à la circonférence, placés d'un même côté, le triangle isoscele* AMB *a la plus grande surface.*

Qu'on abaisse des points M et N les perpendiculaires MO, NP, sur AB : il est clair que la plus grande de ces perpendiculaires est celle MO, qui répond au milieu M de l'arc AMB, ou qui, étant prolongée, passeroit par le

centre C du cercle. D'où il résulte que le produit $\frac{AB \times MO}{2}$, ou la surface du triangle isoscele AMB, est un *maximum*.

275. *Corollaire I.* Donc, de tous les triangles rectangles AMB, ANB (Fig. 179), qui ont la même hypoténuse AB, le triangle isoscele AMB a la plus grande surface. Car, si sur l'hypoténuse commune AB, comme diametre, on décrit un demi-cercle AMB, tous les sommets M, N, des angles droits seront placés à la circonférence ; et le triangle isoscele AMB aura la plus grande hauteur MO, qui est un rayon perpendiculaire à AB.

276. *Corollaire II.* De tous les rectangles AMBK, ANBH (Fig. 180), que l'on peut inscrire dans un cercle, le quarré AMBK a la plus grande surface. Car tirant la diagonale AB, elle est évidemment un diametre du cercle ; et les triangles rectangles AMB, ANB, sont les moitiés du quarré AMBK et du rectangle ANBH. Or, le premier triangle qui est isoscele, est plus grand que le second. Donc aussi le quarré AMBK est plus grand que le rectangle ANBH.

277. Théorême III. *De tous les triangles* AMB, ANB (Fig. 178), *le triangle isoscele* AMB *est celui dans lequel la somme des côtés* MA, MB *est un* maximum ; *c'est-à-dire que* MA+MB > NA + NB.

Prolongez BN de la quantité NX = NA, et tirez les droites MX, MN. Dans les deux triangles MNA, MNX, le côté MN est commun ; le côté NA = le côté NX ; les deux angles MNA, MNX, compris entre les côtés égaux, sont égaux, puisque le premier a pour mesure (103) la moitié de l'arc AZBM, le second pour mesure (105) la moitié de l'arc MAZB, et que les deux arcs AZBM, MAZB, sont égaux, à cause du triangle isoscele AMB, et de la partie commune AZB. Donc les deux triangles MNA, MNX sont parfaitement égaux (49). Ainsi MX = MA = MB. Donc MA+

MB = MX + MB, et NA + NB = NX + NB = XB. Or, MX + MB > XB. Donc MA + MB > NA + NB.

278. Théorême IV. *De tous les triangles isopérimetres* ACB, ADB (Fig. 181), *qui ont la même base* AB, *celui qui a la plus grande surface possible est le triangle isoscele* ACB.

Menez par le sommet C du triangle isoscele ACB la droite MN parallele à AB. Les angles ACM, BCN, sont évidemment égaux, et la somme AC + CB des deux lignes AC, BC, est moindre que la somme AR + RB de deux lignes menées d'un autre point R, pris sur la droite MN, aux points A et B (272 et 273). A plus forte raison la somme CA + CB seroit moindre que la somme RA + RB, si le point R étoit placé au-dessus de MN. Donc, puisqu'on a DA + DB = CA + CB, le point D est nécessairement placé au-dessous de MN, c'est-à-dire, dans l'espace compris entre les deux parallelles AB, MN. Donc, si du point C on abaisse CO perpendiculaire à AB, et que par le point D on mene parallèlement à AB ou à MN la droite DQ qui rencontre CO en Q, on aura CO > QO. Et comme les lignes CO, QO, sont les hauteurs des deux triangles ACB, ADB, qui ont même base AB, il s'ensuit que la surface du premier c'est-à-dire $\frac{AB \times CO}{2}$, est un *maximum*.

279. Théorême V. *Si un triangle rectangle* ABC *et un autre triangle* ABD (Fig. 182) *ont la même base* AB *et le côté* BC *égal au côté* BD, *la surface du premier triangle sera plus grande que celle du second.*

Par le point D menez parallèlement à AB la droite DQ, qui rencontre BC au point Q. L'angle ABC étant droit, les lignes BC, BQ, sont les hauteurs des deux triangles ABC, ABD. Or, dans le triangle rectangle BQD le côté BQ est moindre que l'hypoténuse BD. Donc, à cause

de BD=BC, on aura BQ < BC. Donc $\frac{AB \times BC}{2}$ ou la surface du triangle rectangle ABC, est plus grande que $\frac{AB \times BQ}{2}$ ou la surface du triangle ABD.

280. Théorême VI. *De tous les polygones inscrits dans un même cercle, et ayant le même nombre de côtés, celui* ABCDEF (Fig. 183), *dont la surface est un* maximum, *a tous ses côtés égaux.*

Menez la diagonale AE ; et d'un point quelconque O de l'arc AFE, tirez les cordes OA, OE. La surface du polygone ABCDEF étant un *maximum*, il faut nécessairement que la surface du triangle AFE soit plus grande que celle du triangle AOE ; car, si la surface du triangle AOE égaloit ou surpassoit celle du triangle AFE, la surface du polygone ABCDEF ne seroit pas un *maximum*, puisqu'elle seroit égalée ou surpassée par celle du polygone ABCDEO ; ce qui est contraire à l'hypothese. Or, les deux triangle AFE, AOE étant inscrits dans le même cercle, et ayant la même base AE, celui qui a la plus grande surface est le triangle isoscele AFE (274). Ainsi dans le polygone ABCDEF dont la surface est un *maximum*, le côté EF = le côté FA. On démontrera de même (en menant les diagonales FB, AC, BD, CE), que FA=AB ; que AB=BC ; ainsi de suite de proche en proche, quelque soit le nombre des côtés du polygone. Donc, etc.

281. *Corollaire.* Le polygone inscrit au cercle, et dont tous les côtés sont égaux, a aussi évidemment tous ses angles égaux, et par conséquent il est régulier. Ainsi de tous les polygones inscrits dans un même cercle, et d'un même nombre de côtés, celui qui a la plus grande surface est le polygone régulier.

Le triangle équilatéral étant un polygone régulier, il s'ensuit que de tous les triangles inscrits dans un même cercle, celui qui a la plus grande surface, est le triangle équilatéral.

282. *Remarque.* La même maniere de raisonner s'applique aux périmetres des polygones ; et, en s'appuyant sur le théorême III, on démontrera que de tous les polygones inscrits dans un même cercle, et d'un même nombre de côtés, celui dont le périmetre est un *maximum*, est le polygone régulier.

283. Théorême VII. *De tous les polygones isopérimetres et d'un même nombre de côtés, celui* ABCDEF (Fig. 184), *dont la surface est un* maximum, *a tous ses côtés égaux.*

Menez la diagonale AE, et construisez un triangle AOE isopérimetre au triangle AFE et ayant la même base AE. La surface du polygone ABCDEF étant un *maximum*, et par conséquent plus grande que celle du polygone ABCDEO, il est évident qu'à cause de la partie commune ABCDE la surface du triangle AEF est aussi un *maximum* dans son genre, ou plus grande que la surface du triangle AOE. Donc (278) le triangle AFE est isoscele, c'est-à-dire qu'on a FE=FA. On démontrera de même (en menant les diagonales FB, AC, BD, CE), que FA =AB, AB=BC, BC=CD, CD=DE; ainsi de suite si le polygone avoit un plus grand nombre de côtés. Donc, etc.

284. Théorême VIII. *Tous les côtés d'un polygone* AFEDC (Fig. 185) *étant donnés, à l'exception du dernier* AC, *la surface de ce polygone sera un* maximum, *si l'on dispose tellement ses côtés que les angles* A, F, E, D, C, *soient placés à la circonférence d'un demi-cercle qui auroit le dernier côté* AC *pour diametre.*

D'un angle quelconque E menez aux extrémités du diametre AC les cordes EA, EC. L'angle AEC étant droit, la surface du triangle AEC est plus grande (279) que celle de tout autre triangle GKM (Fig. 186), qui auroit le côté KG=EA, et le côté KM=EC. Qu'on fasse sur KG la portion de polygone KGH parfaitement égale et semblable à la portion de polygone EAF, et sur KM la por-

tion de polygone KMI parfaitement égale et semblable à la portion de polygone ECD : on aura deux polygones AFEDC, GHKIM, égaux dans toutes leurs parties correspondantes, excepté dans les deux triangles EAC, KGM. Donc, puisque la surface du premier triangle est plus grande que celle du second, il s'ensuit que la surface du premier polygone est aussi plus grande que celle du second.

285. Théorême IX. *Un polygone* ABCDEF (Fig. 187), *inscrit dans un cercle, est plus grand qu'un autre polygone* GHIKLM (Fig. 188) *fait avec les mêmes côtés, et non inscrit.*

Menez le diametre AN et les cordes DA, DN, NC ; sur KI = DC faites le triangle KPI parfaitement égal au triangle DNC. L'angle ADN étant droit, le polygone partiel AFEDN est plus grand que le polygone partiel GMLKP (284). Par la même raison le polygone partiel ABCN est plus grand que le polygone partiel GHIP. Donc le polygone total ABCNDEF est plus grand que le polygone total GHIPKLM. Retranchant de ces polygones les triangles égaux NDC, PKI, restera le polygone ABCDEF > le polygone GHIKLM.

286. Théorême X. *De tous les polygones isopérimetres et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est celui qui a la plus grande surface.*

1°. De tous les polygones dont le périmetre et le nombre de côtés sont les mêmes, le plus grand a tous ses côtés égaux (283) ; premier caractere du polygone régulier. 2°. De tous les polygones faits avec les mêmes côtés, le plus grand est celui qui a tous ses angles à la circonférence du cercle (285) ; second caractere du polygone régulier. Ainsi le plus grand de tous les polygones isopérimetres et d'un même nombre de côtés, est le polygone régulier.

287. Théorême XI. *Si un cercle et une autre figure quel-*

conique sont isopérimetres, la surface du cercle sera plus grande que la surface de cette figure.

Tout cercle peut être considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrit dans un vrai cercle. D'un autre côté, quelle que soit l'espece de la figure isopérimetre au cercle, nous pouvons concevoir que son périmetre est partagé en autant de parties qu'il y a de côtés dans celui du polygone régulier que l'on suppose coïncider avec le cercle proposé. Nous aurons donc deux polygones isopérimetres et d'un même nombre infini de côtés, l'un régulier, qui est le cercle, l'autre de telle nature qu'on voudra. Or, par les articles précédents, la surface du premier est plus grande que celle du second. Donc la surface du cercle est plus grande que celle de toute autre figure qui lui est isopérimetre.

288. *Corollaire.* Donc, pour enfermer le plus grand espace possible par une courbe de longueur donnée, il faut que cette courbe soit une circonférence de cercle; et pour enfermer un espace donné, par une courbe qui ait la moindre longueur possible, il faut que cette courbe soit une circonférence de cercle.

TROISIEME PARTIE.

DES SOLIDES.

289. Tout espace renfermé de tous côtés par des surfaces qui se rencontrent, s'appelle *corps* ou *solide*.

Lorsque toutes les faces qui enveloppent un corps sont des polygones rectilignes plans, il s'appelle en général *polyédre*; et il prend spécialement le nom de *tetraédre*, *pentaédre*, *exaédre*, *eptaédre*, *octaédre*, *ennéaédre*, *decaédre*, *endecaédre*, *dodecaédre*, *etc.*, selon qu'il est terminé, ou par 4 faces, ou par 5, ou par 6, ou par 7, ou par 8, ou par 9, ou par 10, ou par 11, ou par 12, etc.

Un poly-édre dont toutes les faces sont des polygones réguliers, égaux et semblablement situés dans l'espace, forme ce qu'on appelle *un corps régulier*, ou *un polyédre régulier*. J'emploierai ordinairement cette derniere dénomination. On verra dans la suite que le nombre des polyédres réguliers est assez limité.

Il est clair qu'en général il ne peut pas exister de polyédre qui n'ait au moins quatre faces; car il est impossible qu'un espace soit enfermé de tous côtés par un moindre nombre de faces.

290. Les corps qui sont terminés par des surfaces courbes, ou en partie planes, en partie courbes, ont des noms relatifs à la nature de ces surfaces, ou à la maniere dont on imagine qu'ils sont engendrés. Le nombre en est infini.

291. L'objet de cette troisieme partie est d'apprendre à mesurer les surfaces et les solidités des corps terminés par des figures rectilignes ou circulaires. Nous ferons encore la

même chose à l'égard de la sphere, qui est parmi les solides ce que le cercle est parmi les polygones.

Il y a dans ces différents corps certaines portions de surfaces, ou de solidités, qui peuvent être également déterminées, ou rappelées à d'autres expressions plus simples, par le moyen de la seule géométrie élémentaire. Je donnerai quelques problémes de cette nature curieux et utiles.

Quant aux autres especes de corps, leurs surfaces et leurs solidités ne peuvent être déterminées en général qu'à l'aide du calcul intégral, qui formera l'objet d'un traité particulier.

Comme nous aurons besoin, dans les recherches que je viens d'indiquer, de plusieurs propriétés des plans, considérés en eux-mêmes, ou par rapport à certaines lignes droites, ou par rapport à d'autres plans, je commence par donner la théorie générale des plans, ou du moins ce qu'elle contient de plus essentiel.

CHAPITRE PREMIER.

Des plans.

292. Un plan est, comme nous l'avons déja dit (6), une surface sur laquelle on peut tracer des lignes droites en toutes sortes de sens.

293. Supposons, pour nous faire une image sensible des plans, deux lignes droites AB, AK (Fig. 189), qui concourent en un point A, et une troisieme ligne droite CD, qui se meuve d'une maniere quelconque en touchant continuellement les droites AB, AK : les traces que la ligne CD, regardée comme colorée, laisse après elle dans chacune de ses positions successives dans l'espace, est une surface plane, ou un plan, puisqu'on y peut évidemment décrire des lignes droites dans tous les sens. Les droites AB, AK, sont elles-mêmes du nombre de ces lignes.

On voit par-là en même temps que deux lignes droites qui se rencontrent sont toujours situées dans un même plan.

294. A mesure que le point A s'éloigne, les lignes AB, AK, tendent au parallélisme ; et elles deviennent enfin parallèles quand le point A est infiniment éloigné. En considérant toujours ce point comme appartenant tout à la fois aux lignes AB, AK, on voit que deux lignes parallèles existent dans un même plan ; et ce plan peut toujours être regardé comme produit par la trace de la ligne CD le long des deux parallèles.

295. Une ligne droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'en le rencontrant elle ne penche d'aucun côté, c'est-à-dire quand elle est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan : telle est la droite AB (Fig. 193) par rapport au plan IK.

296. Deux plans qui se coupent forment ensemble des angles qu'on appelle *angles plans :* tels sont les angles CEA, CDB (Fig. 199), que les deux plans CD, AB, forment entre eux en se rencontrant en ED.

Ces deux angles, qui sont placés d'un même côté par rapport à l'un AB des deux plans, sont *des angles plans de suite.*

Nous verrons ci-dessous comment on mesure les angles plans.

297. Lorsqu'un plan tombe sur un autre plan sans pencher d'aucun côté, il est *perpendiculaire* à ce plan ; et réciproquement celui-ci lui est perpendiculaire.

298. Il suit de là que par une ligne droite tracée sur un plan on ne peut élever qu'un seul plan perpendiculaire au premier ; car tout autre plan élevé sur la même ligne penchera plus ou moins à droite ou à gauche sur le premier plan, et par conséquent ne lui sera pas perpendiculaire.

299. Il suit encore qu'un plan est perpendiculaire à un autre, lorsqu'il passe par une ligne perpendiculaire à celui-ci : car soit la droite AB (Fig. 196) perpendiculaire au

plan IK, et de son pied B pour centre soit décrite sur ce plan une circonférence de cercle : chaque point A de la droite AB étant semblablement placé dans l'espace par rapport à tous les points de la circonférence, tout plan que l'on fera passer par AB aura également la même position par rapport au plan IK dans toute l'étendue de la circonférence ; il ne penchera donc d'aucun côté, c'est-à-dire qu'il sera perpendiculaire au plan IK ; et réciproquement.

On voit aussi par-là qu'un plan perpendiculaire à un autre peut être censé passer par une ligne droite perpendiculaire au second.

300. Deux plans sont appelés *paralleles*, lorsqu'ils sont par-tout également éloignés l'un de l'autre.

La supposition de cette égalité de distances de tous les points de deux plans paralleles, peut présenter ici quelque obscurité : elle sera pleinement dissipée dans la suite.

Propositions générales sur la théorie des plans.

301. Théorême I. *Si par un point* B (Fig. 190), *situé dans le plan* DE, *on mene la droite* AB *dans ce plan, et une droite* BC *qui s'éleve ou s'abaisse par rapport à ce même plan, le systéme des deux lignes* AB, BC, *ne formera pas une seule et méme ligne droite.*

En effet la droite AB peut être prolongée suivant BF dans le plan DE : ainsi, puisque BC ne tombe pas sur la direction BF, il est évident que ABC forme une ligne brisée en B.

302. Théorême II. *Par une méme ligne* AB (Fig. 191), *on peut faire passer une infinité de plans.*

Menez, par le point A, une infinité de droites AD, AG, AF ; et concevez que la droite AB se meuve parallèlement à elle-même le long de toutes ces lignes : elle engendrera des plans qui passeront tous par AB. Donc, par une même droite, on peut faire passer une infinité de plans.

303. Théorême III. *La section commune* EF *de deux*

plans AB, CD (Fig. 192), *qui se rencontrent, est une ligne droite.*

1°. Il est visible que la section EF ne peut pas avoir trois dimensions, puisque chacun des plans n'en a que deux.

2°. Cette même section n'a qu'une seule dimension, qui est une ligne droite : car entre les deux points E et F, regardés comme appartenants au plan AB, on peut tracer sur ce plan une ligne droite EF ; et entre les deux mêmes points, regardés comme appartenants au plan CD, on peut tracer sur ce plan une ligne droite. Or, entre deux points on ne peut tirer qu'une seule ligne droite. Donc les deux lignes en question n'en forment qu'une seule, qui est par conséquent la section commune EF des deux plans.

304. Théorème IV. *Si une ligne* AB (Fig. 193) *est perpendiculaire à deux droites* CF, DE, *qui se croisent à son pied* B, *dans le plan* IK, *elle sera perpendiculaire à ce plan.*

La proposition sera démontrée si l'on fait voir que la droite AB, supposée perpendiculaire aux deux droites CF, DE, sera également perpendiculaire à toute autre droite GH, menée par son pied dans le plan IK ; car alors elle ne penchera d'aucun côté par rapport à ce plan.

Faites les quatre lignes BC, BD, BE, BF, égales entre elles, et menez les droites CD, EF, AC, AD, AE, AF, AG, AH. La droite AB étant perpendiculaire sur le milieu des lignes CF, DE, qui sont égales, on aura (37), AC = AF = AD = AE. De plus, à cause des deux triangles CBD, FBE, qui ont les angles CBD, FBE, égaux, compris entre côtés égaux, et qui sont par conséquent parfaitement égaux (49), on aura, CD = EF. Donc les deux triangles CAD, FAE, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux (51). Ainsi l'*angle* ACD = l'*angle* AFE. Et comme les deux triangles CBG, FBH, qui ont tous les angles égaux, et les côtés BC, BF, égaux, sont parfaitement égaux (50) ; il s'ensuit que CG = FH. Donc les deux triangles ACG, AFH, qui ont un angle égal compris entre côtés

égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux. Ainsi AG = AH. Donc, puisqu'on a BG = BH, la droite AB a deux points A et B également éloignés des extrémités de la droite GH ; elle est donc perpendiculaire à GH (40).

305. *Corollaire I.* Si nous imaginons que les deux lignes CF, DE, se meuvent parallèlement à elles-mêmes le long de la droite BA, elles engendreront deux plans qui seront perpendiculaires au plan IK, puisqu'ils passeront l'un et l'autre par une même ligne AB perpendiculaire à ce plan. Ainsi deux plans qui se coupent suivant une ligne perpendiculaire à deux droites qui se croisent à son pied dans un plan, sont perpendiculaires à ce troisieme plan.

La proposition inverse est également évidente ; c'est-à-dire que, si deux plans sont perpendiculaires à un troisieme plan, leur section commune sera perpendiculaire à leurs sections avec ce même plan. Car, supposons que CF, DE, soient ces sections ; et, par le point B où elles se coupent, élevons-leur la perpendiculaire BA : cette droite BA ne peut être que la section commune des deux plans proposés, puisque, suivant la ligne CF, ou DE, on ne peut élever qu'un seul plan qui soit perpendiculaire au plan IK, et que chacun des plans que la droite CF, ou DE, engendreroit en se mouvant parallèlement à elle-même le long de BA, est perpendiculaire au plan IK. Et comme une ligne ne peut pas être perpendiculaire à deux droites qui se croisent à son pied dans un plan, sans être perpendiculaire à ce plan, nous pouvons conclure encore que la section commune de deux plans perpendiculaires à un troisieme plan est perpendiculaire à ce même plan.

306. *Corollaire II.* Si d'un point A, situé hors d'un plan IK (Fig. 198), on mene une perpendiculaire AB et une oblique AE à ce plan, et qu'ayant joint leurs pieds B, E, par la droite BE, on mene dans le plan IK la droite CD perpendiculaire à BE ; la droite AE sera perpendiculaire à CD. Car, faisant ED = EC, et tirant les droites BC, BD, AC, AD, on aura (37) BC = BD, et à cause des deux

triangles rectangles ABC, ABD, parfaitement égaux, AC= AD. Donc ces droites AC, AD, étant des obliques égales qui dans le plan ACD s'éloignent également de AE, il s'ensuit que AE est perpendiculaire à CD: et réciproquement.

Il est clair que AE ne peut pas être perpendiculaire à une autre ligne du plan CD, autrement elle seroit perpendiculaire à ce plan, ce qui est contre l'hypothese.

307. Théorême V. *Si une droite* AB (Fig. 194), *située dans un plan* TSRV *perpendiculaire au plan* IK, *est perpendiculaire à la section commune* VR *de ces deux plans, elle sera perpendiculaire au plan* IK.

En effet, 1°. la droite AB est perpendiculaire, par hypothese, à la droite VR, qui passe par son pied B dans le plan IK; 2°. les deux plans TSRV, IK, étant perpendiculaires entre eux, le second IK peut être considéré (299) comme passant par la droite XBZ, perpendiculaire au premier; 3°. la droite XBZ, étant perpendiculaire au plan TSRV, est perpendiculaire à toutes les droites BA, VR, qui passent par son pied B dans ce plan (295). Donc réciproquement la droite AB est perpendiculaire à XBZ. Ainsi AB est perpendiculaire aux deux droites VBR, XBZ, qui se croisent à son pied dans le plan IK; donc elle est perpendiculaire à ce plan (304).

308. *Corollaire.* Si de deux lignes paralleles AB, CD, l'une AB est perpendiculaire à un plan IK, l'autre CD sera aussi perpendiculaire au même plan. Car les droites paralleles AB, CD, sont dans un même plan TSRV, lequel, passant par AB, est en conséquence perpendiculaire au plan IK qu'il coupe suivant VR: de plus ces mêmes lignes sont perpendiculaires l'une et l'autre à la droite VR en tant qu'elle appartient au plan TSRV (57); et comme cette ligne VR appartient aussi au plan IK, il s'ensuit que CD est dans un plan perpendiculaire au plan IK, et qu'elle est perpendiculaire à la section commune de ces deux plans; donc elle est perpendiculaire au plan IK.

309. Théorême VI. *Lorsque deux droites* AB, CD, *sont*

perpendiculaires à un même plan IK, *elles sont paralleles entre elles.*

Joignez les pieds B et D des deux perpendiculaires par la droite BD. Chacune des lignes AB, CD, étant perpendiculaire au plan IK, si l'on fait passer un plan suivant AB et BD, il sera perpendiculaire au plan IK; et de même si l'on fait passer un plan suivant CD et BD, il sera perpendiculaire au plan IK. Or, ces deux plans perpendiculaires à IK, passant par la même droite BD, n'en forment qu'un seul (298), dans lequel les droites AB, CD, sont situées; et comme elles sont de plus perpendiculaires à la droite BD, il s'ensuit qu'elles sont paralleles (64).

310. *Corollaire.* Si deux droites AB, CD (Fig. 195), sont paralleles à une troisieme ligne EF, elles seront paralleles entre elles; car, si l'on imagine un plan auquel EF soit perpendiculaire, les deux droites AB, CD, étant chacune en particulier paralleles à EF, seront l'une et l'autre perpendiculaires au plan IK (308). Donc elles seront paralleles.

311. Problême. I. *D'un point* A (Fig. 196), *situé hors d'un plan* IK, *abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

Déterminez sur le plan IK, au moyen d'un compas, ou d'un cordeau bien tendu, trois points C, D, E, également éloignés du point A; faites passer par ces trois points une circonférence de cercle; par le point A et par le centre B de ce cercle menez la droite AB: elle sera perpendiculaire au plan IK. Car les obliques AC, AH, situées dans le plan ACH, étant égales, AB est perpendiculaire à CH; de même AB est perpendiculaire à DE. Donc AB est perpendiculaire aux deux droites CH, DE, qui se croisent à son pied B dans le plan IK. Donc elle est perpendiculaire à ce plan (304).

312. Problême II. *Par un point donné* M (Fig. 197) *sur un plan* IK, *élever une perpendiculaire à ce plan.*

D'un point A, choisi arbitrairement hors du plan IK, abaissez une perpendiculaire AB à ce plan; joignez les

points B et M par la droite MB, et faites passer un plan par AB et MN; élevez au point M dans ce plan une perpendiculaire MN à BM : cette ligne sera la perpendiculaire demandée (307).

313. *Remarque.* Si on proposoit de mener d'un point situé hors d'un plan une perpendiculaire à une ligne tracée dans ce plan, le problême se résoudroit facilement par ce qui précede ; mais on peut observer qu'il revient à celui de l'article 43, puisqu'on peut faire passer, par le point et la ligne donnée, un plan dans lequel on exécutera l'opération de l'article cité.

De l'inclinaison d'un plan ou d'une ligne sur un plan.

314. Théorême VII. *Un angle plan* CDB (Fig. 199) *formé par deux plans* CD, BD, *qui se rencontrent en* ED, *a même mesure que l'angle rectiligne* IFG, *formé par deux perpendiculaires* IF, GF, *menées dans ces deux plans au même point* F *de leur section commune.*

Imaginons qu'au premier instant le plan CD soit couché sur le plan BD, de telle sorte que les deux lignes IF, GF, supposées égales, ne forment alors qu'une seule et même ligne perpendiculaire à ED ; supposons ensuite que, le plan BD restant immobile, on fasse tourner le plan CD sur ED, comme sur une charniere, pour former l'angle plan CDB : il est clair que, pendant ce mouvement, les droites IF, GF, demeurent toujours dans un même plan IGF perpendiculaire à ED, et que le point I décrit un arc de cercle qui exprime la quantité dont le plan CD s'éloigne de sa position initiale pour former l'angle plan CDB, et qui est par conséquent la mesure de cet angle. Or, ce même arc est la mesure de l'angle rectiligne IFG. Donc l'angle plan CDB a même mesure que l'angle rectiligne formé par deux perpendiculaires menées dans les deux plans à un même point de leur section commune.

Semblablement l'autre angle plan CEA a même mesure que l'angle rectiligne IFK.

315. *Corollaire.* De là les théorèmes démontrés (30, 34, 36), pour les angles rectilignes, et leurs corollaires, ont également lieu pour les angles plans. Ainsi la somme de deux angles plans de suite vaut deux angles droits; les angles plans opposés par le sommet sont égaux : si quatre angles plans formés autour d'une ligne sont tels que les opposés au sommet soient égaux deux à deux, les quatre plans n'en formeront réellement que deux ; etc. etc.

316. Problème III. *Déterminer l'angle d'inclinaison d'une ligne droite à l'égard d'un plan.*

De même que la distance d'un point à un plan s'exprime par la perpendiculaire, laquelle est la plus courte ligne qu'on puisse mener du point proposé au plan; l'angle d'inclinaison d'une ligne par rapport à un plan est le moindre de tous les angles que cette ligne forme avec les différentes lignes droites que l'on peut mener par son pied dans ce plan.

Ce principe posé, soit IF la ligne droite dont il faut déterminer l'inclinaison par rapport au plan AE, qu'elle rencontre en F ; et, pour éviter de faire une nouvelle *Figure*, considérons cette ligne en elle-même, indépendamment du plan CD qui est ici censé supprimé. D'un point quelconque H de FI abaissons sur le plan AE une perpendiculaire HL, et joignons les points L, F, par la droite LF : alors l'angle HFL est celui d'inclinaison de la droite IF à l'égard du plan AE. En effet l'angle HFL est moindre que tout autre angle HFT que la droite HIF fait avec une droite FT, menée par son pied F dans le plan AE. Car si, après avoir abaissé du point H la perpendiculaire H*t* sur FT, nous imaginons que sur FH, comme diametre, on ait décrit un cercle, et que les angles droits HLF, H*t*F, ont leurs sommets placés sur la circonférence, on verra que la corde HL étant moindre que la corde H*t*, l'angle HFL sera aussi moindre que l'angle HF*t*.

317. *Corollaire.* Le plan HFL (en tant qu'il passe par HL perpendiculaire à AE), étant perpendiculaire à ce

plan AE, le résultat précédent est le même que si on disoit que *l'angle d'inclinaison de la droite* IF, *par rapport au plan* AE, *est celui que forment cette ligne et la section commune* FK *du plan* AE *avec un second plan passant par* FI *et perpendiculaire au premier.*

Faites à ce sujet une observation souvent utile, qui est qu'on peut toujours faire passer par une ligne inclinée à un plan, un autre plan qui soit perpendiculaire au premier; car il ne faut pour cela que mener par un point de l'oblique, par exemple, par son pied, une perpendiculaire au premier plan, et faire passer un plan par ces deux lignes; il remplira la condition imposée.

Des plans paralleles.

318. Supposons un plan de position fixe; par exemple, un plan horizontal: concevons que sur tous les points de ce plan s'élevent des perpendiculaires égales, et qu'ensuite on fasse passer une *surface* par toutes les extrémités supérieures des perpendiculaires dont il s'agit: cette surface sera dite *parallele* au plan proposé.

On voit que cette définition est analogue à celle que j'ai donnée (55) pour les lignes paralleles.

319. *Corollaire.* Il suit de là que la surface supérieure est un *plan*: car toutes les perpendiculaires élevées sur le plan inférieur étant égales, si l'on imagine que ces lignes diminuent continuellement de quantités égales, jusques à devenir nulles, il est évident que la surface parallele conservera la même nature dans toutes ses positions. Or, dans sa derniere position, elle vient se confondre avec le plan inférieur; donc, dans toutes les autres, elle forme aussi un plan.

Ainsi deux plans paralleles ont cette propriété caractéristique, que l'un passe par toutes les extrémités des lignes perpendiculaires égales, élevées sur l'autre, en tous ses points.

320. Théorême VIII. *Si deux plans paralleles sont rencontrés par un troisieme plan, les sections seront des droites paralleles.*

1°. Chacune des deux sections (303) est une ligne droite. 2°. Ces deux lignes sont paralleles (55), puisqu'en les regardant comme situées l'une et l'autre dans le plan sécant, la section supérieure passe par les extrémités des perpendiculaires égales élevées sur tous les points de la section inférieure, considérée comme située dans le plan parallele inférieur.

321. *Corollaire I.* Les intersections de deux plans paralleles, avec un troisieme plan, étant ainsi des droites paralleles, on voit (57, 58, 59), que les perpendiculaires égales, élevées sur l'un des plans paralleles, expriment indifféremment et réciproquement la distance qui se trouve entre les deux droites paralleles, en un endroit quelconque, et que par conséquent ces deux mêmes paralleles sont par-tout également éloignées l'une de l'autre.

322. *Corollaire II.* Deux plans paralleles sont par-tout également éloignés l'un de l'autre. Car si, par l'une quelconque des perpendiculaires égales, on fait passer une infinité de plans, suivant des directions différentes, chacun de ces plans coupera les deux plans paralleles, suivant deux droites paralleles, par-tout également distantes : il en sera de même pour toutes les autres paires de paralleles déterminées par les autres plans sécants. Or, toutes les distances de ces différentes lignes étant égales, il est clair, relativement aux deux plans paralleles, que la distance d'un point quelconque de l'un d'eux à l'autre plan est par-tout la même. Donc, etc.

323. Théorême IX. *Si deux plans paralleles* GH, IK (Fig. 200), *sont rencontrés en* AC *et* BD, AE *et* BF, *par deux plans* ABDC, ABFE, *qui se coupent suivant* AB, *les deux angles* CAE, DBF, *formés sur ces deux plans paralleles, seront égaux.*

Faites AC=BD, AE=BF, et tirez les droites CE, DF, CD, EF. A cause du parallélisme des deux plans GH, IK, les droites égales AC et BD sont paralleles; et de même les droites égales AE, BF, sont paralleles. Donc

les quadrilateres ABDC, ABFE, sont des parallélogrammes ; et on a (80) AB = CD = EF. D'un autre côté les deux lignes égales CD, EF, sont paralleles comme étant l'une et l'autre paralleles à AB (310). Donc CDFE est un parallélogramme, et on a EC = FD. Ainsi les deux triangles CAE, DBF, ont les trois côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent parfaitement égaux. Donc les deux angles homologues CAE, DBF, sont égaux.

Des angles solides.

324. Si plusieurs angles ESF, FSG, GSH, HSI, ISE (Fig. 201, n°. 2), s'assemblent au point S, et forment autour de ce point une figure fermée, la somme de tous ces angles est ce qu'on appelle *un angle solide* : expression un peu impropre, mais abrégée.

Il est évident que, pour former un angle solide, il faut au moins trois plans ; car si on n'en prenoit que deux, il resteroit une ouverture entre eux.

325. Théorême X. *Dans tout angle solide* X (Fig. 201, n°. 1), *composé de trois angles rectilignes* VXY, VXZ, YXZ, *la somme de deux de ces angles est toujours plus grande que le troisieme angle.*

Soit VXY le plus grand des trois angles rectilignes ; faites l'angle VXT = l'angle VXZ ; prenez les côtés XT, XZ, égaux entre eux ; et menez les droites TV, ZV, au point V du côté XV ; prolongez VT jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté XY en un point Y, et tirez ZY. Les deux triangles TXV, ZXV, sont parfaitement égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (49). Donc VT = VZ. Mais VZ + ZY > VY : donc, en retranchant des deux membres les quantités égales VZ, VT, restera ZY > TY. Ainsi dans les deux triangles ZXY, TXY, qui ont le côté commun XY et les côtés égaux XZ, XT, le troisieme côté YZ du premier est plus grand que le troisieme côté YT du second. Par conséquent (79), *ang.* YXZ > *ang.* TXY. Donc (à cause de *ang.* TXV =

ang. VXZ, et de *ang.* VXT + *ang.* TXY = *ang.* VXY), on aura *ang.* VXZ + *ang.* ZXY > *ang.* VXY.

326. Théorème XI. *Quel que soit le nombre de plans qui, en formant entre eux des angles saillants, se réunissent au point* S (Fig. 201, n°. 2), *l'angle solide* S *est toujours moindre que la somme de quatre angles droits.*

Nommons, pour abréger, S.... la somme de tous les angles du sommet qui composent l'angle solide S;

B..... la somme de tous les angles à la base SEF, SFE, SFG, SGF, etc. des triangles latéraux;

P..... la somme de tous les angles EFG, FGH, etc. du polygone de la base;

N..... le nombre des côtés de ce polygone;

D..... La valeur de l'angle droit.

Cela posé, la somme des trois angles de chaque triangle latéral valant deux angles droits, et le nombre de ces triangles étant le même que celui des côtés du polygone de la base, on aura $S + B = 2D \times N$. Mais d'un autre côté (71), on a $P = 2D \times N - 4D$, ou $2D \times N = P + 4D$. Substituant cette valeur de $2D \times N$ dans l'équation $S + B = 2D \times N$, elle deviendra

$$S + B = P + 4D.$$

Maintenant considérons les points F, G, H, etc. comme les sommets d'autant d'angles solides, composés chacun de trois angles rectilignes; savoir, F des trois angles EFG, EFS, GFS; G des trois angles FGH, FGS, HGS, etc.; nous aurons, en vertu du théorème précédent, $B > P$. Donc, puisque, dans l'équation $S + B = P + 4D$, le terme B du premier membre est plus grand que le terme P du second, il faut que l'on ait $S < 4D$.

327. Problème IV. *Un angle solide étant supposé formé de trois plans seulement, déterminer l'angle que deux de ces plans font ensemble.*

Soient les trois plans ASB, ASC, ESBD (Fig. 202),

étendus d'abord sur un même plan, qui est celui de la planche, et qu'on peut regarder comme horizontal, pour fixer les idées. Je suppose que le plan ASB demeurant immobile, les deux autres se relevent, et tournent, l'un ASC, autour de AS comme charniere, l'autre ESBD, autour de SB comme charniere, jusqu'à ce que les deux lignes SC, SE, supposées égales, viennent se confondre et former une seule et même arête. Il naîtra de ce double mouvement un angle solide autour du point S ; et la question est, par exemple, de déterminer l'angle que les deux plans ASB, ASC, feront alors ensemble.

Cet angle est le même (314) que l'angle rectiligne formé par deux perpendiculaires tirées, dans les deux plans, à un même point de leur section commune. Pour parvenir à trouver celui-ci, du point C je mene CO perpendiculaire à la section commune AS prolongée des deux plans ASB, ASC ; et du point E je mene EG perpendiculaire à BS. Cela posé, j'observe que, pendant la rotation simultanée des deux plans ASC, ESBD, autour des lignes SA, SB, les droites CO, EG, demeurent toujours perpendiculaires aux lignes ASO, BSG, et que, lorsque les points C et E viendront à se confondre, ils seront placés à l'extrémité supérieure d'une ligne verticale, dont l'extrémité inférieure est représentée par le point H, intersection des droites CO, EG, sur le plan horizontal. De plus, j'observe que l'extrémité supérieure de la même verticale est distante du point O de la quantité CO, puisque le point C décrit un arc de cercle dont OC est le rayon. Donc, si l'on mene HI perpendiculaire sur CO, et que du point O comme centre, avec le rayon OC, on décrive un arc de cercle qui coupe HI au point I ; qu'ensuite on imagine que le triangle rectangle OHI tourne sur OH, comme charniere, jusqu'à devenir vertical : le point I se confondra avec les points C et E. De plus, en regardant la droite CO comme située dans le plan horizontal, c'est-à-dire dans le plan ASB, il est évident que l'angle IOC est le même que celui que le plan ASC relevé fait avec le prolongement AS*b* du plan ASB, puisque cet angle IOC est formé par deux perpendiculaires IO, CO, menées dans les deux

plans ASC, AS*b*, au même point O de leur section commune. Donc, pour avoir l'angle que le plan ASC fait avec le plan ASB, il faut faire un angle qui, joint à l'angle IOC, vaille deux droits, ou, ce qui en est la suite, faire un angle qui soit composé d'un angle droit et d'un angle aigu égal à l'angle OIH. Or cela peut s'exécuter ainsi très commodément à l'aide des lignes qui sont déja tirées dans la Figure. Du point H comme centre, avec le rayon OC ou OI, décrivez un arc de cercle qui coupe SA au point M; vous aurez le triangle rectangle MOH parfaitement égal au triangle rectangle IHO. Donc, si par le point M on mene MN perpendiculaire à SA, l'angle HMN sera l'angle demandé, puisque cet angle est égal à la somme des deux angles SMN, OMH, dont le premier est droit et dont le second est égal à l'angle OIH.

On déterminera par la même méthode les angles que les plans ASB, ASC, font chacun avec le plan ESBD.

Ce problème est utile dans la *coupe des pierres* pour trouver les angles que les panneaux de douelles, de joints et de têtes, forment ensemble. L'angle HMN, que nous avons déterminé, est celui que fait le panneau de douelle plate avec le panneau de joint dans une trompe surbaissée, biaise, en talut, dans un angle aigu. (Voyez la *Coupe des pierres* de la Rue, pag. 71 et 72.)

Des Projections.

328. Si de tous les points d'une figure on mene à un plan, qui ne lui est pas parallele, des lignes droites paralleles entre elles, la nouvelle figure que les extrémités de toutes ces lignes forment sur ce plan s'appelle la *projection* de la figure proposée; le plan sur lequel se fait la projection s'appelle *plan de projection*; les lignes paralleles menées de tous les points de la figure au plan de projection, *lignes de projection*.

Lorsque les lignes de projection sont perpendiculaires au plan, la projection prend le nom de projection *orthographique* ou *orthogonale*. L'usage est même de désigner par le simple

les *bases opposées* du prisme ; et une perpendiculaire FO, tirée d'un point F de l'une de ces bases sur l'autre, s'appelle *hauteur* du prisme.

Quand on dit simplement la base d'un prisme, on entend sa base inférieure ABCDE.

L'assemblage des faces latérales FABG, GBCH, etc., s'appelle la *surface convexe* du prisme.

334. Le prisme est *droit* lorsque les arêtes FA, GB, HC, etc. sont perpendiculaires aux bases opposées. Alors chacune de ces arêtes peut être regardée comme la hauteur du prisme. Si les arêtes sont inclinées par rapport aux bases, le prisme est *oblique*, et alors ses arêtes sont plus grandes que sa hauteur.

335. Le prisme, soit droit, soit oblique, prend sa dénomination du nombre de côtés du polygone qui en est la base. Si cette base est un triangle, le prisme est *triangulaire* (Fig. 204).

Si la base est un parallélogramme, le prisme s'appelle *parallélépipede* (Fig. 205). Et si de plus la base est un rectangle et que le prisme soit droit, il s'appelle *parallélépipede rectangle*.

Parmi les parallélépipedes rectangles, le plus simple de tous est le cube (Fig. 206), qui est terminé par six quarrés égaux et perpendiculaires entre eux. Ce solide, que l'imagination se représente très aisément, parceque toutes ses faces sont symmétriques et ne contiennent que des angles droits, sert d'unité dans la mesure des solides comme le quarré sert d'unité dans la mesure des surfaces.

Si la base du prisme est un pentagone (Fig. 203), le prisme est *pentagonal*. Et en général on emploie l'expression *prisme polygonal* pour désigner un prisme dont la base est un polygone quelconque.

336. Lorsque les bases opposées d'un prisme sont des cercles (Fig. 207 et 208), qu'on peut toujours regarder

comme des polygones d'une infinité de côtés, le prisme prend le nom de *cylindre*.

La droite NM, menée du centre de la base supérieure à celui de la base inférieure, s'appelle *l'axe* du cylindre.

337. Si l'axe NM est perpendiculaire aux bases opposées du cylindre, ce cylindre est *droit* (Fig. 207); et alors l'axe peut exprimer la hauteur du cylindre. Si l'axe est oblique par rapport aux bases, le cylindre est oblique (Fig. 208); et alors l'axe est plus grand que la hauteur FO du cylindre.

Ces définitions posées, venons à la mesure de la surface et de la solidité des prismes.

Surface du Prisme.

338. Les faces latérales d'un prisme étant des parallélogrammes, leur surface se trouve par l'article 127; et on aura par conséquent la surface convexe du prisme en ajoutant ensemble les expressions de tous ces parallélogrammes. Les surfaces des bases opposées se trouvent par l'article 132. Et lorsque ces bases sont des cercles, leurs surfaces se trouvent par l'article 251.

Si un prisme polygonal est coupé par un plan qui ne soit pas parallele à ses bases opposées, les surfaces convexes de ses deux parties sont composées de trapezes dont les surfaces se déterminent par l'article 130; et la surface de la section, qui est un polygone, se détermine par l'article 132 déja cité.

Ainsi on a, dans ce qui précede, tous les principes nécessaires pour mesurer les surfaces et portions de surfaces des prismes, déterminées par des plans; et nous pourrions nous dispenser de nous étendre davantage sur ce sujet. Mais il est à propos de présenter ici la mesure de la surface convexe du prisme sous la forme la plus simple dont elle est susceptible.

339. Théorême. *La surface convexe d'un prisme quel-*

conque (Fig. 203) *est égale au produit de sa directrice multipliée par le périmetre d'une section* a b c d e, *faite perpendiculairement à cette directrice.* (*)

Le plan *a b c d e* étant perpendiculaire à la directrice AF, est aussi perpendiculaire à toutes les autres arêtes GB, HC, etc. qui sont paralleles à AF. Donc, en prenant les droites AF, BG, CH, etc. pour les bases des parallélogrammes FB, GC, HD, etc., les droites *ab*, *bc*, *cd*, en seront les hauteurs. Donc la surface convexe du prisme sera exprimée par AF × *ab* + BG × *bc* + CH × *cd* + etc., ou (à cause que les lignes AF, BG, CH, etc. sont égales), AF × *ab* + AF × *bc* + AF × *cd* + etc., ou enfin par AF × (*ab* + *bc* + *cd* + etc.)

340. *Corollaire I.* Lorsque le prisme est droit, la section *a b c d e* est égale à chacune de ses bases opposées, et la directrice devient la hauteur du prisme. Ainsi on peut dire que la surface convexe d'un prisme droit est égale au produit de sa hauteur par le contour du polygone qui en est la base inférieure ou supérieure.

341. *Corollaire II.* On voit par-là que la surface convexe d'un cylindre droit (Fig. 207) est égale au produit de sa hauteur NM par la circonférence de sa base inférieure ou supérieure.

Dans les cylindres obliques (Fig. 208), la section *abcd*, faite perpendiculairement à la directrice AF, est une courbe qu'on appelle *ellipse*. On auroit besoin de savoir déterminer le contour de cette courbe pour pouvoir mesurer la surface convexe du cylindre : mais une telle détermination n'est pas du ressort de la géométrie élémentaire.

Solidité du Prisme.

342. Théorême I. *Un parallélépipede oblique quelconque*

(*) Par un plan perpendiculaire à une ligne, ou par un plan auquel une ligne est perpendiculaire, on entend la même chose. La premiere expression est la plus usitée, comme la plus courte.

est égal en solidité à un parallélépipede rectangle qui auroit base et hauteur égales aux siennes.

Il est clair, en général, que deux solides sont égaux lorsqu'ils sont terminés par des plans égaux, semblables, et semblablement disposés. Ce principe n'est autre chose que celui de superposition appliqué aux solides. En voici l'usage dans le cas présent.

Soit le parallélépipede oblique ABCDEFGH (Fig. 209). Je suppose qu'il ait pour bases des parallélogrammes; et qu'il soit incliné en deux sens, ou que les deux faces contiguës ADEF, ABGF, soient inclinées l'une et l'autre par rapport à la base ABCD. Imaginons que, suivant les côtés AD, BC, paralleles, de la base inférieure, s'élevent les deux plans ADKI, BCML, perpendiculaires à cette base, et terminés en IK et LM par la base supérieure, en AI et BL par le plan de la face ABGF, en DK et CM par le plan de la face DCHE. Nous aurons ainsi un second parallélépipede ABCDKILM, égal au parallélépipede proposé. En effet les deux prismes triangulaires AFIKDE, BGLMCH, sont terminés par des plans égaux, semblables, et semblablement disposés: car les quatre triangles AFI, DEK, BGL, CHM, sont parfaitement égaux entre eux; les trois parallélogrammes AFED, FIKE, AIKD, sont parfaitement égaux chacun à chacun des parallélogrammes correspondants BGHC, GLMH, BLMC; de plus, dans les deux prismes, les faces correspondantes sont semblablement situées. Donc ces deux mêmes primes sont parfaitement égaux. Ajoutant à chacun le même solide ABCDEFLM, on aura les deux parallélépipedes parfaitement égaux ABCDEFGH, ABCDKILM. Je puis donc au premier substituer le second, et ne m'occuper plus que de celui-ci, qui n'est incliné qu'en un sens par rapport à sa base ABCD. Traçons-le à part (Fig. 210) pour éviter la confusion des lignes.

En opérant sur ce parallélépipede comme nous avons fait sur le premier, nous lui ferons perdre la seule obliquité qu'il ait par rapport à sa base ABCD. Elevons donc, suivant les côtés AB, DC, paralleles, de la base inférieure, deux plans ABPO, DCQN, perpendiculaires à cette base,

et terminés en OP et NQ par le plan de la base supérieure, en AO et DN par le plan de la face ADKI, en BP et CQ par le plan de la face BCML. On voit que les deux prismes triangulaires AIOPLB, DKNQMC, sont parfaitement égaux, et que par conséquent, en ajoutant à chacun le même solide IABLQNDC, les deux parallélépipedes ABCDKILM, ABCDNOPQ, sont parfaitement égaux. Nous pourrons donc ne considérer que le dernier, qui est tracé à part (Fig. 211); et nous voyons qu'à la place du parallélépipede primitif, nous avons un parallélépipede, dont les quatre faces latérales ABPO, DCQN, ADNO, BCQP, sont perpendiculaires à ses bases opposées.

Enfin, dans la base ABCD, menons des angles D et C les perpendiculaires DS, CT, sur les côtés opposés; concevons ensuite que suivant ces lignes s'élevent perpendiculairement à la base les plans SDNX, TCQY, qui rencontrent les faces ADNO, BCQP, en SX et TY, et le plan de la base supérieure en NX et QY. On voit, toujours par les mêmes considérations, que le parallélépipede STCDNXYQ est parfaitement égal au parallélépipede ABCDNOPQ, puisque les plans menés ajoutent autant d'un côté à ce dernier parallélépipede qu'ils lui ont ôté d'un autre côté. Nous voilà donc parvenus à un parallélépipede rectangle STCDNXYQ, égal en solidité au parallélépipede proposé ABCDEFGH. Or ces deux parallélépipedes ont même hauteur; et leurs bases STCD, ABCD, sont égales; donc, etc.

343. *Corollaire I.* Donc, lorsqu'on saura trouver la solidité d'un parallélépipede rectangle, on saura trouver également celle de toute autre espece de parallélépipede.

344. *Corollaire II.* Si par les angles homologues des deux bases opposées d'un parallélépipede quelconque on mene deux diagonales, et que suivant ces lignes; qui sont égales et paralleles, on fasse passer un plan; ce plan partagera le parallélépipede proposé en deux prismes triangulaires qui seront parfaitement égaux, et qui seront par

conséquent chacun la moitié du parallélépipede. Donc chacun de ces prismes sera aussi la moitié d'un parallélépipede rectangle qui auroit même hauteur que le parallélépipede proposé, et une base égale à la sienne.

345. Théorême II. *La solidité d'un parallélépipede rectangle* STCDNXYQ (Fig. 212) *est égale au produit des trois arêtes contiguës à un de ses angles ; c'est-à-dire, qu'elle est exprimée par* ST × SD × SX.

Le sens de cet énoncé est que si l'on se sert d'une certaine mesure, par exemple du pied, pour mesurer les trois arêtes proposées ST, SD, SX, le parallélépipede contiendra autant de pieds cubes qu'il y a d'unités dans le produit ST × SD × SX. Le pied cube sert ici d'unité, comme le pied linéaire sert d'unité pour la mesure des lignes, et le pied quarré d'unité pour la mesure des surfaces.

En effet, 1°. le nombre de pieds quarrés contenus dans la base STCD du parallélépipede est exprimé par ST × SD (126).

2°. Si, par tous les points de division de la hauteur SX, qui sont supposés distants l'un de l'autre de 1 pied, on mene des plans paralleles à la base, le parallélépipede sera partagé en autant de parallélépipedes d'une base égale à la sienne et de 1 pied de hauteur, qu'il y a de pieds dans la hauteur SX. Et comme chacun de ces parallélépipedes partiels contient évidemment autant de pieds cubes qu'il y a de pieds quarrés dans la base STCD, il s'ensuit que le parallélépipede proposé contiendra autant de pieds cubes qu'il y a d'unités dans le produit ST × SD × SX.

Remarquez que, dans l'expression ST × SD × SX, la partie ST × SD exprime la base du parallélépipede, tandis que SX en exprime la hauteur. Ainsi on peut dire que la solidité d'un parallélépipede rectangle est égale au produit du rectangle qui lui sert de base par la hauteur de ce parallélépipede.

346. *Corollaire I.* Donc, pour avoir la solidité d'un pa-

rallélépipede oblique quelconque ABCDEFGH (Fig. 209), il faut abaisser d'un angle D de la base ABCD une perpendiculaire DS sur le côté AB, et d'un point F de la base supérieure une perpendiculaire FO sur la base inférieure, ensuite faire le produit AB × DS × OF. Car ce produit exprime la solidité d'un parallélépipede rectangle qui auroit pour côtés contigus à sa base les lignes AB, DS, et pour hauteur OF ; parallélépipede auquel le parallélépipede proposé est égal (342).

Dans le produit AB × DS × OF, la partie AB × DS exprime la base du parallélépipede proposé, et OF sa hauteur. Ainsi on peut dire que la solidité d'un parallélépipede quelconque est égale au produit de sa base et de sa hauteur.

347. *Corollaire II.* On aura la solidité d'un prisme triangulaire quelconque ABCHFG (Fig. 204) en abaissant d'un angle C de sa base ACB une perpendiculaire CS sur le côté AB, et d'un point F de la base supérieure une perpendiculaire FO sur la base inférieure, puis faisant le produit $\frac{AB \times CS}{2} \times OF$. Car le prisme proposé est la moitié d'un parallélépipede qui auroit pour base le parallélogramme ABCD, double du triangle ABC, et pour hauteur OF. Or, l'expression de la solidité de ce parallélépipede est AB × CS × OF. Donc la solidité du prisme triangulaire proposé a pour expression, $\frac{AB \times CS}{2} \times OF$.

Dans cette expression, $\frac{AB \times CS}{2}$ est la valeur de la base ABC du prisme triangulaire, OF sa hauteur. Ainsi la solidité d'un prisme triangulaire quelconque est égale au produit de sa base et de sa hauteur.

348. *Corollaire III.* En général la solidité d'un prisme quelconque (Fig. 203) est égale au produit de sa base et de sa hauteur. Car si dans les deux bases opposées on mene, par les angles homologues A et F, des diagonales à

tous les autres angles, et que par chaque paire de diagonales, qui sont égales et paralleles deux à deux, on fasse passer des plans ; on partagera le prisme en autant de prismes triangulaires de même hauteur qu'il y a de triangles dans chacune des bases. Or, chacun de ces prismes partiels est le produit de sa base par sa hauteur ; donc le prisme proposé, qui en est la somme, sera le produit de la somme de leurs bases, ou de sa propre base multipliée par la hauteur commune.

On voit que cela a également lieu lorsque la base du prisme est un cercle. Ainsi la solidité d'un cylindre, soit droit, soit oblique, est égale au produit de sa base et de sa hauteur.

349. *Corollaire IV.* Deux prismes, deux cylindres, qui ont des bases égales, sont entre eux comme leurs hauteurs ; et deux prismes, deux cylindres, qui ont des hauteurs égales, sont entre eux comme leurs bases. Car, en général, deux prismes sont entre eux comme les produits de leurs bases et de leurs hauteurs. Or, on ne change rien dans un rapport en divisant ses deux termes par une même quantité, qui est ici la valeur de chacune des bases de nos prismes, ou la valeur de leur hauteur.

CHAPITRE III.

De la Pyramide.

350. La *pyramide* (Fig. 213) est un solide terminé par un polygone quelconque ABCDE, qui lui sert de base, et par des plans triangulaires ASB, BSC, CSD, etc. qui s'élevent sur les côtés de ce polygone, et qui vont tous se réunir en un même point S, qu'on appelle *sommet* de la pyramide.

Nous pouvons encore regarder la pyramide comme un solide compris entre le polygone de sa base et la surface

qui seroit engendrée par le mouvement d'une ligne droite qui, en tournant autour du sommet S, glisseroit le long de tous les côtés du polygone.

La perpendiculaire SO, abaissée du sommet de la pyramide sur sa base, en est la *hauteur*.

351. On dit qu'une pyramide est *triangulaire* (Fig. 214), *quadrangulaire* (Fig. 215), *pentagonale* (Fig. 213), etc. selon que le polygone qui lui sert de base est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, etc.; et en général on emploie l'expression *pyramide polygonale* pour désigner une pyramide dont la base est un polygone quelconque.

352. Lorsque le polygone de la base est régulier (Fig. 216), et que de plus la perpendiculaire SO, abaissée du sommet de la pyramide, passe par le centre de ce polygone, la pyramide est *réguliere*.

Il est clair que dans ces sortes de pyramides tous les triangles latéraux ASB, BSC, CSD, etc. sont isosceles et parfaitement égaux. Si donc du sommet S l'on tire la droite SK, perpendiculaire sur l'un AB des côtés de la base, cette ligne, qui tombe sur le milieu de AB, pourra exprimer la hauteur de tous les triangles dont il s'agit : elle s'appelle l'*apothéme* de la pyramide réguliere.

353. Une pyramide qui a pour base un cercle (Fig. 218 et 219), qu'on peut regarder comme un polygone d'une infinité de côtés, s'appelle un *cône*.

Les droites SA, SC, etc. menées du sommet du cône à la circonférence de sa base, s'appellent les *côtés* du cône; et la droite SM, menée du sommet au centre de la base, s'appelle l'*axe*.

354. Il y a deux sortes de cônes; le cône *droit*, et le cône *oblique* ou *cône scalene*.

Dans le cône droit (Fig. 218) l'axe SM est perpendiculaire à la base, et par conséquent il exprime en même temps la hauteur du cône. On voit que ce solide peut être

regardé comme produit par la révolution du triangle rectangle SMA autour de l'axe SM.

Dans le cône oblique (Fig. 219), l'axe SM n'est pas perpendiculaire à la base ; il est plus grand que la hauteur SO du cône. Ce cône n'est pas un solide de révolution ; c'est-à-dire qu'il ne peut pas être regardé comme produit par la révolution d'une même figure autour d'une même ligne. Il est seulement dans le cas de toute pyramide ; il peut être considéré comme l'espace compris entre le cercle de sa base et la surface engendrée par le mouvement d'une ligne SZ, qui passeroit sans cesse par le point S, et qui toucheroit en tournant tous les points de la circonférence ABCD.

En coupant un cône oblique par des plans qui passent tous par son axe, on formera des triangles qui auront des hauteurs inégales, mais des bases égales, ces bases étant les diametres du cercle qui sert de base au cône. Le plus petit d'entre eux en surface est celui ASC, qui partage le cône en deux parties égales et semblables (on l'appelle ordinairement *triangle par l'axe*) ; et le plus grand est celui qui est perpendiculaire au triangle ASC.

Surface de la Pyramide.

355. La surface d'une pyramide quelconque se trouve en cherchant la surface du polygone qui lui sert de base, et les surfaces de ses triangles latéraux, puis ajoutant ensemble toutes ces parties.

Si une pyramide est coupée par un plan quelconque, les surfaces de ses parties sont composées de triangles, de quadrilateres, et de polygones. Dans tous les cas ces différentes surfaces se déterminent par les méthodes que nous avons données dans la seconde partie de ce traité. Nous n'avons rien à y ajouter. Les recherches suivantes ont seulement pour objet de déterminer de la maniere la plus simple qu'il est possible la surface et les portions de surfaces dans la pyramide réguliere et dans le cône droit.

356. Lemme. *Si on coupe une pyramide quelconque*

lui sert de base, comme $\frac{SK \times (AB+BC+CD+\text{etc.})}{2}$ est à $\frac{OK \times (AB+BC+CD+\text{etc.})}{2}$, ou (en divisant les deux derniers termes de cette proportion par le facteur qui leur est commun), comme SK est à OK, c'est-à-dire, comme l'apothême de la pyramide est à l'apothême du polygone de sa base.

361. *Corollaire II.* La pyramide S*abcde* étant aussi réguliere, si on retranche sa surface convexe de celle de la pyramide SABCDE, le reste sera la surface convexe du tronc ABCDE*eabcd*. Cette surface a donc pour expression $\frac{SK \times (AB+BC+CD+\text{etc.})}{2} - \frac{Sk \times (ab+bc+cd+\text{etc.})}{2}$.

362. *Remarque I.* Nous pouvons donner une autre expression plus simple de la même surface. Pour cela, on observera que tous les trapezes latéraux AB*ba*, BC*cb*, etc. sont parfaitement égaux, et qu'ils peuvent être censés avoir tous pour hauteur la partie *kK* de l'apothême, laquelle est perpendiculaire aux côtés opposés et paralleles *ab*, AB. Et comme (130) la surface d'un trapeze, tel que AB*ba*, a pour valeur $\frac{kK \times (AB+ab)}{2}$; il s'ensuit que la surface convexe du tronc aura pour valeur $\frac{kK \times (AB+ab)}{2} + \frac{kK \times (BC+bc)}{2} + \frac{kK \times (CD+cd)}{2} +$, etc., ou, ce qui revient au même, $kK \times \left(\frac{AB+BC+CD+\text{etc.}}{2} + \frac{ab+bc+cd+\text{etc.}}{2}\right)$, c'est-à-dire le produit de la hauteur d'un trapeze latéral par la moitié de la somme des contours des deux bases.

363. *Remarque II.* La même surface a encore pour valeur le produit de la hauteur d'un trapeze latéral par le périmetre d'une section *mnpqr*, faite parallèlement aux bases opposées du tronc et à égales distances de ces bases.

En effet, traçons à part (Fig. 217) le trapeze AB*ba*; et par le point *n*, milieu de B*b*, menons *xy* parallele à *a*A : on verra qu'à cause de B*n* = *nb*, les deux triangles B*ny*, *bnx*, qui ont d'ailleurs tous les angles égaux, sont parfaitement égaux. Ainsi AB surpasse A*y* ou *mn* de la même quantité dont *ab* est surpassé par *ax* ou *mn*; et par conséquent $2mn = AB + ab$, et $mn = \frac{AB + ab}{2}$. De même $np = \frac{BC + bc}{2}$, $pq = \frac{CD + cd}{2}$, etc. Donc, puisque la surface du tronc est exprimée par $k K \times (\frac{AB + BC + CD + \text{etc.}}{2} + \frac{ab + bc + cd + \text{etc}}{2})$, elle sera aussi exprimée par $k K \times (mn + np + pq + \text{etc.})$.

364. *Remarque III.* Tout ce que nous venons de dire dans les cinq articles précédents au sujet des pyramides régulieres en général s'applique également au cône droit (Fig. 218), puisque ces sortes de cônes sont en effet des pyramides régulieres. Ainsi,

1°. La surface convexe d'un cône droit est égale à la moitié du produit de son côté par la circonférence de sa base.

2°. Cette surface est à celle du cercle de sa base, comme le côté du cône est au rayon de la base.

3°. On aura la surface convexe d'un tronc de cône droit, à bases paralleles, en retranchant de la moitié du produit de la circonférence de la base du cône entier par le côté, la moitié du produit de la circonférence de la base du cône partiel par le côté de ce même cône.

4°. et 5°. La surface convexe d'un tronc de cône droit, à bases paralleles, est égale au produit de la portion de côté comprise entre les circonférences de ces deux bases, multipliée par la moitié de la somme des mêmes circonférences, ou par la circonférence d'un cercle parallele pris à égales distances des bases.

Quant à la surface convexe et aux portions de surface

convexe du cône oblique, elles ne peuvent pas être déterminées par la géométrie élémentaire. Si on veut se contenter de déterminations approchées, on n'aura qu'à partager la circonférence de la base en un grand nombre de parties qu'on regardera comme les bases d'autant de triangles rectilignes, dont les surfaces et portions de surfaces se trouvent par les moyens indiqués (355).

365. Problème. *Connoissant, dans une pyramide régulière* SABCDE (Fig. 216), *l'une des arêtes et les dimensions du polygone qui lui sert de base : déterminer la hauteur* SO *de cette pyramide.*

Soit OA ou OB le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier ABCDE : toutes les dimensions de ce polygone étant données, on aura l'expression de OA en AB ; ensuite le triangle rectangle SOA donnera $SO = \sqrt{[(SA)^2 - (OA)^2]}$, expression dans laquelle tout est connu.

Par exemple, soit ABCDE un pentagone régulier : on a (239), $(AB)^2 = \frac{(OA)^2 \times (5-\sqrt{5})}{2}$, ou $(OA)^2 = \frac{2(AB)^2}{5-\sqrt{5}}$. Donc $SO = \sqrt{[(SA)^2 - \frac{2(AB)^2}{5-\sqrt{5}}]}$.

Détermination de certaines portions de surface dans le cône droit.

Les propositions suivantes ne se trouvent, du moins que je sache, dans aucun livre de géométrie élémentaire. Comme elles sont curieuses et qu'elles peuvent être utiles, j'ai cru qu'on ne les trouveroit point ici déplacées.

366. Théorème. *Si sur la surface convexe d'un cône droit* SABCD (Fig. 220) *on trace une courbe quelconque* EF, *terminée par les côtés* SC, SI, *et que de tous les points de cette courbe on abaisse des perpendiculaires sur la base, lesquelles y forment par leurs extrémités la courbe* GH, *la surface conique* SEF *sera à la surface de projection* OGH, *comprise entre la courbe* GH *et les rencontres* OG, OH, *des*

plans SOC, SOI, *avec la base, comme le côté* SC *du cône est au rayon* OC *de sa base.*

On voit que ce théorême est un cas particulier ou une application du théorême général de l'article 331 : application que je vais développer en détail pour ne laisser aucune obscurité sur ce sujet.

Qu'on mene suivant l'axe du cône les deux plans SOx, SOy, qui forment entre eux un angle infiniment petit, et qui rencontrent la surface du cône suivant les droites Sx, Sy, et la base suivant les droites Ox, Oy. Il est clair que le petit triangle Sst a pour projection le petit triangle Ouz. Des points s et u soient abaissées les petites perpendiculaires sr, un, sur les côtés St, Oz. Les deux triangles dont nous venons de parler pouvant être considérés l'un et l'autre comme rectilignes, la surface du premier est $\frac{St \times sr}{2}$, et celle du second est $\frac{Oz \times un}{2}$. Or, à cause des deux triangues semblables Sxy, Ssr, on a, Sx : xy :: Ss : sr = S$s \times \frac{xy}{Sx}$; et, à cause des triangles semblables Oxy, Oun, on a, Ox : xy :: Ou : un = O$u \times \frac{xy}{Ox}$. Donc, en mettant pour sr et un leurs valeurs dans les expressions des surfaces des deux triangles Sst, Ouz, ces expressions deviendront $\frac{St}{2} \times \frac{Ss \times xy}{Sx}$, $\frac{Oz}{2} \times \frac{Ou \times xy}{Ox}$; et, en divisant par le facteur commun $\frac{xy}{2}$, elles seront entre elles dans le rapport de $St \times \frac{Ss}{Sx}$ à $Oz \times \frac{Ou}{Ox}$. Or, à cause des paralleles SO, su, on a (149), Ss : Sx :: Ou : Ox; ce qui donne $\frac{Ss}{Sx} = \frac{Ou}{Ox}$; et, à cause des paralleles SO, tz, le rapport de St à Oz est le même que celui de Sy à Oy. Donc la surface du triangle Sst est à celle du triangle de projection Ouz comme le côté Sy du cône est au rayon Oy de la base. Le même rapport ayant lieu entre un autre triangle quelconque élémentaire de la surface conique SEF et le triangle de projection correspondant, on doit conclure que la surface conique entiere

SEF est à sa projection entiere OGH, comme le côté du cône est au rayon de sa base.

367. *Corollaire I.* Donc, si la projection OGH est un espace déterminable ou *quarrable*, pour nous servir du mot usité parmi les géometres, la surface conique SEF sera aussi quarrable, puisque ces deux surfaces sont entre elles dans un rapport donné.

368. *Corollaire II.* On voit par-là que pour assigner des espaces quarrables sur la surface d'un cône droit, il ne s'agit que de tracer sur sa base une figure rectiligne, et par conséquent quarrable, et d'élever ensuite, de tous les points de cette figure, des paralleles à l'axe du cône : l'espace que ces lignes détermineront sur la surface du cône sera quarrable.

Ainsi on peut, au moyen des simples éléments de géométrie, résoudre pour le cône droit un problême analogue à celui que Viviani avoit proposé et résolu pour les voûtes hémisphériques. *Voyez l'éloge de Viviani par Fontenelle.*

Il est également facile de déterminer des espaces quarrables sur la surface d'un cylindre.

369. Problême. *Le cône droit* SABCD (Fig. 221) *étant coupé par un plan quelconque* EFQ, *qui forme sur sa surface la courbe* FEQ, *on demande l'expression de la surface conique* SFEQS, *comprise entre cette courbe et les côtés* SF, SQ, *en supposant qu'on connoisse la surface* EFQ.

Soit OFHQO la projection orthographique de la surface conique SFEQS, on aura (366) $SFEQS = OFHQO \times \frac{SF}{OF}$, ou bien (à cause que l'espace OFHQO est la somme du triangle OFQ et de l'espace FQH), $SFEQS = (OFQ + FQH) \times \frac{SF}{OF}$. Reste à trouver les surfaces OFQ, FQH.

Qu'on mene par l'axe SO du cône et par le sommet E de

la courbe FEQ, un plan SOHE, qui rencontre en EV le plan EFQ : ces deux plans seront perpendiculaires entre eux, et la droite EV sera perpendiculaire à FQ, puisque les deux courbes partielles EF, EQ, sont parfaitement égales et semblables, et que FV=VQ. Ainsi 1°. la surface du triangle isoscele $OFQ = \frac{FQ \times OV}{2}$.

2°. Nous pouvons regarder la surface EFQ comme composée d'une infinité de lignes, telles que *mn*, paralleles à EV, et sa projection FQH comme composée d'une infinité de lignes correspondantes *np*, paralleles à VH. Ainsi, puisque les deux triangles rectangles *mnp*, EVH, ont tous leurs angles égaux (323), et sont par conséquent semblables, il s'ensuit que chaque élément *mn* de la surface EFQ est à chaque élément correspondant *np* de la projection FQH, dans le rapport constant de EV à VH. Donc la surface entiere EFQ est à sa projection entiere FQH, comme EV est à VH ; ce qui donne $FQH = \frac{EFQ \times VH}{EV}$.

Substituons les valeurs de OFQ et de FQH dans l'expression de SFEQS, trouvée ci-dessus, et nous aurons $SFEQS = (\frac{FQ \times OV}{2} + \frac{EFQ \times VH}{EV}) \times \frac{SF}{OF}$. D'où l'on voit que la surface conique SFEQS est exprimée en quantités toutes connues.

370. *Corollaire I.* Lorsque le plan EFQ passe par le centre O de la base du cône, le triangle OFQ s'évanouit (Fig. 222) ; et l'on a $SFEQS = \frac{EFQ \times OH}{OE} \times \frac{SF}{OF}$.

371. *Corollaire II.* Si le plan EFQ passe toujours par le centre O, et qu'il soit de plus parallele au côté SA du cône, on aura $\frac{OH}{OE} = \frac{OA}{SA} = \frac{OF}{SF}$. Donc alors SFEQS = EFQ, c'est-à-dire que la surface conique SFEQS est égale à la surface EFQ.

Dans le cas présent, la courbe FEQ s'appelle une *parabole ;* et on démontre, par des méthodes qui n'appartiennent pas tout-à-fait aux éléments de géométrie, que la sur-

face $EFQ = \frac{2FQ \times EO}{3}$. Ainsi la surface conique $SFEQS = \frac{2FQ \times EO}{3}$.

On peut remarquer qu'à cause des triangles semblables COE, CAS, et de $CO = \frac{CA}{2}$, on a aussi $EO = \frac{SA}{2}$, c'est-à-dire que EO est la moitié du côté du cône. Ainsi la surface conique SFEQS est ici égale au tiers du produit du diametre de la base par le côté du cône.

Ce corollaire fournit une maniere très simple de déterminer les surfaces des voûtes connues sous le nom de *trompes droites sur le coin ;* car ces sortes de trompes sont des portions de cônes droits coupés par des plans paralleles à leurs côtés.

372. *Corollaire III.* Si l'on coupe un cône droit SABCD (Fig. 223), perpendiculairement au triangle SAC, par un plan EFRQ qui rencontre les côtés SC, SA, aux points E, R, et l'axe au point M, qu'ensuite on abaisse du sommet S la perpendiculaire SK à la section commune EM des deux plans EFRQ, SAC, et du point M la perpendiculaire MN au côté SC du cône ; la surface conique SEFRQE aura pour expression $EFRQ \times \frac{SK}{MN}$. Car si nous menons MH perpendiculaire à SM, et EL parallele à SM, et si nous faisons attention que SH et MH peuvent être regardées comme le côté et le rayon de la base d'un cône droit qui seroit produit par la révolution du triangle rectangle SMH autour de SM, nous verrons (370) que la surface conique $SEFRQE = EFRQ \times \frac{ML}{EM} \times \frac{SH}{MH}$. Or, à cause des deux triangles rectangles semblables MLE, SKM, on a $\frac{ML}{EM} = \frac{SK}{SM}$; et à cause des deux triangles rectangles semblables SMH, SNM, on a $\frac{SH}{MH} = \frac{SM}{MN}$. Donc, en substituant ces valeurs de $\frac{ML}{EM}$ et de $\frac{SH}{MH}$, on aura $SEFRQE = EFRQ \times \frac{SK}{MN}$.

D'Alembert démontre ce théorême d'une maniere très différente dans ses *Opuscules mathématiques*, tome I, pages 238 et 239.

373. *Corollaire IV.* Reprenons la Figure 221. Puisque nous possédons (369) la méthode de déterminer la surface conique SFEQS, et que d'un autre côté la surface conique SFCQS, comprise entre les côtés SF, SQ, et l'arc FCQ de la base, est évidemment égale au produit $\frac{FCQ \times SF}{2}$, il est clair qu'en retranchant de cette expression celle de la surface SFEQS, nous aurons la surface convexe extérieure de l'onglet conique EFQC. Si à cette surface nous ajoutons la surface EFQ, qui est supposée connue, et la surface du segment circulaire FQC, qui se trouve (140), nous aurons l'enveloppe ou la surface totale du même onglet.

La surface de l'autre partie SFAQES du cône se trouvera de la même maniere.

Solidité de la Pyramide.

374. Il seroit embarrassant de déterminer la solidité des pyramides par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour les prismes. Nous allons prendre une autre voie plus simple et non moins naturelle.

375. Théorême I. *Deux pyramides* SABC, TMNPQR (Fig. 224 et 225), *qui ont des hauteurs égales* SO, TZ, *sont entre elles comme leurs bases, quelques figures qu'aient d'ailleurs ces bases.*

Qu'on mene parallèlement aux bases, et à distances égales des sommets et des bases, les deux plans *abc*, *mnpqr*; et soient *o*, *z*, les points où ces plans rencontrent les hauteurs SO, TZ. Les deux polygones *abc*, ABC, étant semblables (356), on a $abc : ABC :: (ab)^2 : (AB)^2 :: (So)^2 : (SO)^2$. De même, les deux polygones *mnpqr*, MNPQR, étant semblables, on a $mnpqr : MNPQR :: (mn)^2 : (MN)^2 :: (Tz)^2 : (TZ)^2$. Or, à cause de SO = TZ, et de So = Tz, on a $(So)^2 : (SO)^2$

:: $(Tz)^2 : (TZ)^2$. Donc *abc* : ABC :: *mnpqr* : MNPQR ; ou bien *alternando*, *abc* : *mnpqr* :: ABC : MNPQR. Ainsi chaque section *abc* de la premiere pyramide est à chaque section correspondante *mnpqr* de la seconde dans le rapport constant de la base ABC à la base MNPQR. Donc, en regardant ces deux pyramides, comme composées d'un même nombre infini de tranches *abc*, *mnpqr*, on conclura que la somme des tranches qui composent la premiere pyramide, ou la solidité de cette pyramide, est à la somme des tranches qui composent la seconde pyramide, ou la solidité de cette pyramide, comme la base ABC est à la base MNPQR.

376. *Corollaire.* Donc, si les deux bases des deux pyramides de même hauteur sont égales en surfaces, les deux pyramides seront égales en solidité.

377. Théorême II. *Une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Soit le prisme triangulaire ABCFED (Fig. 226) ; qu'on mene d'un angle A les diagonales AD, AF, dans les faces parallélogrammiques ABDE, ACFE, et qu'on fasse passer un plan suivant ces diagonales ; il partagera le prisme en deux pyramides, l'une triangulaire ADEF (Fig. 227), l'autre quadrangulaire ABCFD (Fig. 228). La premiere a même base que le prisme, et sa hauteur est la même que celle du prisme, puisque son sommet A est placé dans la base supérieure du prisme. Coupons la seconde par un nouveau plan, conduit suivant les arêtes AC, AD ; nous formerons deux nouvelles pyramides ABCD, ACFD, qui ont leurs sommets au même point A, et pour bases les triangles égaux BCD, FDC. Donc ces deux pyramides sont égales en solidité. Or, si nous comparons la pyramide ABCD avec la pyramide ADEF, et si nous les considérons comme ayant leurs sommets aux points D et A, et pour bases les triangles BAC, DEF, nous verrons que ces deux pyramides sont égales, puisqu'elles ont hauteurs égales et bases égales. Donc les trois pyramides ADEF, DBAC, ACFD, dans lesquelles le prisme a été dé-

composé, sont égales en solidité. Donc l'une ADEF d'elles, qui a même base et même hauteur que le prisme, en est le tiers.

378. *Corollaire I.* Donc une pyramide triangulaire est le tiers du produit de sa base par sa hauteur, puisque le prisme est égal à ce produit entier (347).

379. *Corollaire II.* Toute pyramide TMNPQR (Fig. 225) est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur. Car si l'on imagine une pyramide triangulaire SABC (Fig. 224), dont la hauteur SO soit égale à la hauteur TZ de la pyramide proposée, on aura (375) TMNPQR : SABC :: MNPQR : ABC. Mettant pour SABC sa valeur $\frac{ABC \times SO}{3}$ ou $\frac{ABC \times TZ}{3}$, on aura TMNPQR : $\frac{ABC \times TZ}{3}$ :: MNPQR : ABC; ce qui donne TMNPQR = $\frac{MNPQR \times TZ}{3}$.

380. *Corollaire III.* Le solide d'un cône quelconque droit ou oblique (Fig. 218 et 219) est égal au tiers du produit de sa base ABCD par sa hauteur SO, puisque le cône est une pyramide dont la base est un cercle.

381. Problème I. *Déterminer la solidité d'un tronc pyramidal* MNPQRrmnpq (Fig. 225), *dont les bases opposées* MNPQR, mnpqr, *sont parallèles.*

Supposons d'abord que DEFCBA (Fig. 226) soit un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles, et coupons ce tronc par le plan ADF : nous le partagerons ainsi en deux pyramides ADEF, ABCFD, dont la premiere (Fig. 227) a pour base la base inférieure DEF du tronc et même hauteur que que lui, le point A étant placé dans la base supérieure; la seconde (Fig. 228) a pour base le trapeze BCFD, et son sommet au point A. Coupons cette seconde pyramide par le plan ADC; nous aurons deux nouvelles pyramides ABCD, ADFC, qui, ayant leurs sommets au point A, ou

même hauteur, sont entre elles comme leurs bases BCD, DFC (375). Mais, en regardant les paralleles BC, DF, comme les bases des deux triangles BCD, DFC, on a (129) BCD : DFC :: BC : DF. On aura donc, *pyramide* ABCD : *pyramide* ADFC :: BC : DF.

Maintenant, au lieu de regarder la pyramide ABCD comme ayant pour base le triangle BCD et son sommet au point A, on peut supposer qu'elle a pour base le triangle ABC, base supérieure du tronc, et son sommet au point D, ou même hauteur que le tronc ; et si l'on convertit la pyramide ADFC en une autre qui ait même hauteur que le tronc, et dont la solidité soit représentée par P, la base par X, on aura (375) DABC : P :: ABC : X. Donc, à cause de DABC : ADFC ou P :: BC : DF, on aura ABC : X :: BC : DF. Mais EDF : ABC :: $(DF)^2$: $(BC)^2$. Multipliant par ordre ces deux proportions, on aura EDF : X :: DF : BC ; ou X : EDF :: BC : DF. Donc ABC : X :: X : EDF. D'où l'on voit que la base X est moyenne proportionnelle entre les deux bases ABC, EDF, du tronc pyramidal DEFCBA. Ainsi ce même tronc est égal à la somme de trois pyramides de même hauteur que lui, et dont les bases sont respectivement sa base inférieure, sa base supérieure, et une aire moyenne proportionnelle entre les deux mêmes bases.

Cela posé, revenons à notre tronc MNPQR*rmnpq* (Fig. 225), Si on le partage en troncs pyramidaux par des plans menés suivant les diagonales correspondantes dans les deux polygones semblables MNPQR, *mnpqr*, qu'ensuite on décompose chaque tronc pyramidal comme nous avons décomposé en derniere analyse le tronc DEFCBA ; on verra, 1°. que la somme des pyramides qui ont pour bases les triangles du polygone MNPQR, est égale à une seule pyramide de même hauteur que le tronc, et ayant pour base le polygone MNPQR ; 2°. que pareillement la somme des pyramides qui ont pour bases les triangles du polygone *mnpqr* est égale à une pyramide de même hauteur que le tronc, et ayant pour base le polygone *mnpqr* ; 3°. que la somme des pyramides qui ont leurs bases moyennes proportionnelles entre deux triangles corres-

pondants des deux polygones MNPQR, *mnpqr*, est égale à une seule pyramide qui auroit même hauteur que le tronc, et une base moyenne proportionnelle entre les deux polygones MNPQR, *mnpqr* ; car, à cause de la similitude de ces deux polygones, chaque triangle de la base *mnpqr* étant à l'aire moyenne proportionnelle entre ce triangle et le triangle correspondant de la base MNPQR, dans le rapport constant de deux lignes homologues des deux polygones, par exemple, dans celui du côté *mn* au côté MN ; il s'ensuit que la somme des triangles qui composent la surface *mnpqr*, ou cette surface elle-même, est à la somme (que je nomme Z) des aires moyennes proportionnelles entre tous les triangles des bases du tronc, comparés deux à deux, dans le même rapport constant de *mn* à MN ; ce qui produit la proportion *mnpqr* : Z :: *mn* : MN. Mais d'un autre côté on a MNPQR : *mnpqr* :: $(MN)^2$: $(mn)^2$. Multipliant ces ceux proportions par ordre, on aura MNPQR : Z :: MN : *mn*, ou Z : MNPQR :: *mn* : MN. Donc *mnpqr* : Z :: Z : MNPQR. D'où il suit que Z est moyenne proportionnelle entre les deux bases opposées du tronc MNPQR *rmnpq*. Ainsi ce même tronc est égal à la somme de trois pyramides de même hauteur que lui, et qui ont respectivement pour bases sa base inférieure, sa base supérieure, et une aire moyenne proportionnelle entre ces deux mêmes bases.

On appliquera le même raisonnement et la même conclusion à un tronc de cône à bases paralleles, en regardant les polygones MNPQR, *mnpqr*, comme des cercles.

382. Problème II. *Déterminer la solidité d'un tronc* ABCFED (Fig. 229) *de prisme droit triangulaire, dont* ABC *est la base, et* DEF *une section inclinée aux arêtes* AD, BE, CF.

Supposons que AD soit la plus courte des trois arêtes AD, BE, CF, du tronc ; et par le point D soit mené le plan D*bc* parallele à ABC. Il est clair que ce plan partagera le tronc en un prisme droit triangulaire ABC*cb*D, et une pyramide quadrangulaire DE*bc*F. Des points A et D

menons sur les bases BC, *bc*, des triangles ABC, D*bc*, les perpendiculaires AM, DK, qui sont évidemment égales. Cela posé, 1°. le prisme ABC*cb*D $= \frac{BC \times AM}{2} \times AD = \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(AD + B\,b + C\,c)}{3}$.

2°. Les côtés E*b*, F*c*, du trapeze E*bc*F étant perpendiculaires à *bc*, l'aire de ce trapeze $= \frac{bc \times (E\,b + F\,c)}{2} = \frac{BC \times (E\,b + F\,c)}{2}$; et par conséquent la pyramide D*bc*FE $= \frac{BC \times (E\,b + F\,c)}{2} \times \frac{DK}{3} = \frac{BC \times (E\,b + F\,c)}{2} \times \frac{AM}{3} = \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(E\,b + F\,c)}{3}$.

Ajoutant cette expression avec celle du prisme ABC*cb*D, on aura le tronc prismatique ABCFED $= \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(AD + B\,b + C\,c)}{3} + \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(E\,b + F\,c)}{3} = \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(AD + B\,b + C\,c + E\,b + F\,c)}{3} = \frac{BC \times AM}{2} \times \frac{(AD + BE + CF)}{3}$.

D'ou l'on voit que le tronc est égal au produit de sa base par le tiers de la somme de ses trois arêtes.

383. *Corollaire I.* Soit maintenant GLNFED (Fig. 23●) une portion de prisme triangulaire quelconque, dans laquelle les bases opposées ont, l'une par rapport à l'autre, telle inclinaison qu'on voudra. Menons par un point quelconque A, pris sur l'une des arêtes du tronc, un plan ABC perpendiculaire à ces arêtes; nous partagerons le tronc en deux parties ABCEFD, ABCNLG, dont la premiere $= ABC \times \frac{(AD + BE + CE)}{3}$; et la seconde $= ABC \times \frac{(AG + BL + CN)}{3}$. Donc le tronc entier $= ABC \times \frac{(DG + EL + FN)}{3}$. C'est-à-dire que ce solide est égal au produit d'une section perpendiculaire à ses arêtes par le tiers de la somme de ses trois arêtes.

384. *Corollaire II.* Sachant ainsi trouver le solide d'un tronc quelconque de prisme triangulaire, on pourra déterminer le solide d'un tronc quelconque de prisme quelconque; car il ne faudra pour cela que partager le tronc proposé en troncs triangulaires par des plans conduits suivant ses arêtes, et ajouter ensemble les expressions de ces derniers troncs.

Ainsi, par exemple, est-il question de déterminer la solidité du tronc prismatique quadrangulaire et droit ABCDEFGH (Fig. 231)? On menera par les deux arêtes BG, DE, un plan BDEG, qui partagera le tronc proposé en deux troncs triangulaires BCDEGF, ABDEGH, dont le premier $=$ BCD $\times \frac{(BG+CF+DE)}{3}$, et le second $=$ ABD $\times \frac{(AH+BG+DE)}{3}$. Donc le tronc proposé $=$ BCD $\times \frac{(BG+CF+DE)}{3} +$ ABD $\times \frac{(AH+BG+DE)}{3}$.

Ces sortes de solides se rencontrent fréquemment dans le toisé de la fortification.

Il y a des praticiens qui, pour déterminer les solides dont il s'agit, ajoutent ensemble toutes les hauteurs, puis divisent la somme par le nombre des hauteurs, pour avoir ce qu'ils appellent une *hauteur réduite*, et enfin multiplient cette hauteur par la base ou section perpendiculaire aux arêtes. Cette pratique coïncide avec notre méthode pour les troncs de prismes triangulaires; mais hors ce seul cas elle en diffère, et s'éloigne par conséquent de la vérité.

385. Problème III. *Le cône quelconque* SABCD (Fig. 221), *droit ou oblique, étant coupé par un plan quelconque* EFQ, *on demande les expressions des parties dans lesquelles il est divisé, en supposant qu'on connoisse l'aire de la section* EFQ.

Du sommet S menez la hauteur SO du cône, la droite SK perpendiculaire au plan EFQ prolongé s'il est nécessaire, les côtés SF, SQ, aux extrémités de la droite FQ,

section commune du plan EFQ avec la base du cône. Cela posé,

1°. Il est évident qu'on peut considérer le solide SCFQS comme une pyramide qui a pour base le segment CFQ, et pour hauteur SO. Ainsi ce solide $= \frac{CFQ \times SO}{3}$.

2°. De même on peut considérer le solide SAFQS comme une pyramide qui a pour base le segment AFQ, et SO pour hauteur. Ainsi ce solide $= \frac{AFQ \times SO}{3}$.

3°. On peut considérer le solide SEFQS comme une pyramide qui a pour base l'aire EFQ, et SK pour hauteur. Ainsi ce solide $= \frac{EFQ \times SK}{3}$.

En retranchant le troisieme solide du premier, on aura le solide de l'onglet conique EFQC; et, en ajoutant le troisieme solide au second, on aura le solide de la portion restante SEFQA du cône.

CHAPITRE IV.

De la Sphere.

386. La *sphere* (Fig. 232) est un solide terminé par une surface courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur C, qui en est le centre.

Ce solide peut être regardé comme engendré par la révolution du demi-cercle AEB autour du diametre AB. Dans cette révolution, les ordonnées EC, ON, décrivent des cercles EFDG, OHMI, dont les centres C, N, sont placés sur le diametre AB. Ainsi toute section de la sphere par un plan perpendiculaire au diametre AB est un cercle.

La sphere pouvant être regardée également comme engendrée par tout autre demi-cercle MAV autour du diametre MV, et les ordonnées à ce diametre décrivant aussi des

cercles, nous devons conclure en général qu'en quelque sens qu'on coupe une sphere par un plan, la section sera toujours un cercle.

387. Les cercles qui passent par le centre de la sphere en sont les *grands cercles*, les autres en sont les *petits cercles*.

Il est clair que tous les grands cercles sont égaux; mais parmi les petits il n'y a que ceux qui passent à égales distances du centre qui soient égaux.

388. Le solide AOHMI, compris entre le cercle OHMI et la portion de surface sphérique qui s'appuie sur lui, s'appelle *segment sphérique*. Il peut être regardé comme engendré par le mouvement du demi-segment circulaire ANO autour de l'abscisse ou fleche AN. La surface produite par l'arc AO s'appelle *calotte sphérique*.

389. Si au segment sphérique on joint le cône droit COHMI, l'assemblage COAM est un *secteur sphérique*. Ce solide peut être regardé comme produit par la révolution du secteur circulaire ACO autour du rayon AC.

Par une expression de cette espece *cir.* ON, j'entendrai la circonférence qui a ON pour rayon; et par *cer.* ON, j'entendrai l'aire du cercle qui a ON pour rayon.

Surface de la Sphere.

390. Théorême. *La surface d'une sphere est égale à la surface convexe du cylindre qui lui est circonscrit.*

Considérons la sphere (Fig. 233) comme produite par la révolution du demi-cercle AFB autour du diametre AB, et le cylindre comme produit par la révolution du rectangle ADEB autour de la même ligne AB; menons à l'axe AB de révolution les perpendiculaires infiniment voisines *mp*, *nq*, qui déterminent sur l'arc AFB, générateur de la surface sphérique, et sur le côté DE, générateur de la surface convexe du cylindre, les parties correspondantes *fg*, *mn*. Il

est clair que *fg*, qu'on peut regarder comme une petite ligne droite, engendre dans sa révolution la surface convexe d'un petit tronc de cône droit à bases paralleles, et que *mn* engendre une petite surface cylindrique correspondante. Et comme ces surfaces partielles et élémentaires de la surface sphérique et de la surface cylindrique sont en même nombre et se correspondent l'une à l'autre, il est évident que la surface de la sphere sera démontrée égale à la surface convexe du cylindre, si l'on parvient à démontrer que la petite surface conique engendrée par *fg* est égale à la petite surface cylindrique engendrée par *mn*.

Du point *t*, milieu de *fg*, menez *tu* perpendiculaire à AB. L'expression de la petite surface conique produite par *fg* est $fg \times cir.\ tu$ (364, n°. 5); et celle de la petite surface cylindrique produite par *mn* est $mn \times cir.\ nq$ (341). Or, si l'on tire le rayon *t*C, et la droite *fh* perpendiculaire à *nq*, on formera deux triangles *fhg*, *tu*C, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, et qui sont par conséquent semblables (165). Ainsi ces triangles donnent $fg : fh$ ou $mn :: Ct$ ou $nq : tu$. Donc, à cause de la proportion (179), $nq : tu :: cir.\ nq : cir.\ tu$, on aura $fg : mn :: cir.\ nq : cir.\ tu$, et par conséquent $fg \times cir.\ tu = mn \times cir.\ nq$. La petite bande ou *zone* sphérique produite par *fg* est donc égale à la petite zone cylindrique correspondante engendrée par *mn*.

391. *Corollaire I.* Donc la surface de la sphere est quadruple de celle de l'un de ses grands cercles; car la surface d'un grand cercle est $\frac{AC \times cir.\ AC}{2}$ (138); et la surface de la sphere qui est égale à celle du cylindre circonscrit, sera (341) $AB \times cir.\ AC$, ou $2AC \times cir.\ AC$, expression quadruple de $\frac{AC \times cir.\ AC}{2}$.

392. *Corollaire II.* Puisque les zones élémentaires de la surface de la sphere et de la surface convexe du cylindre circonscrit sont égales, on voit également que la surface de la calotte sphérique *f*A*r* et la surface convexe du cylindre par-

tiel correspondant mDQl sont égales, puisqu'elles sont composées d'un même nombre de ces zones élémentaires. Semblablement, la surface convexe de la zone sphérique quelconque fFxyGr, dont les bases opposées sont des cercles paralleles, et la surface convexe du cylindre partiel correspondant mKIl, sont égales.

De là, l'expression de la surface de la calotte sphérique fAr est Ap × *cir.* AC; et celle de la surface convexe de la zone sphérique fFxyGr est ps × *cir.* AC. De sorte qu'en général la surface d'une calotte sphérique ou d'une zone sphérique est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

393. *Corollaire III.* En nommant π le rapport de la circonférence du cercle au diametre, l'expression de la surface de la calotte sphérique fAr sera Ap × π × 2AC, ou π × Ap × 2AC. Or, si l'on mene la corde Af, on a (190) (Af)^2 = Ap × 2AC. Donc la surface de la calotte = π(Af)^2; ce qui est (251) la valeur de la surface du cercle qui a pour rayon la corde Af.

394. *Remarque.* Si, au lieu de supposer, comme dans les quatre articles précédents, que le demi-cercle AFB et le rectangle ADEB font une révolution entiere autour de l'axe AB, on suppose qu'ils font seulement une moitié, ou un quart, ou en général une partie quelconque $\frac{1}{n}$ de révolution, on aura des *fuseaux*, ou des portions de *fuseaux sphériques et cylindriques*, correspondants et égaux. Ainsi l'expression de la surface d'un fuseau sphérique entier qui répond au diametre AB, sera AB × $\frac{cir.\ AC}{n}$; celle de la surface de la portion de fuseau, produite par l'arc Af, sera Ap × $\frac{cir.\ AC}{n}$; celle de la surface de la portion de fuseau, produite par l'arc fFx, sera ps × $\frac{cir.\ AC}{n}$.

Détermination de la surface d'un triangle sphérique.

395. Je commence par quelques définitions et notions préparatoires.

I.

On appelle *triangle sphérique* un espace AED (Fig. 234), compris sur la surface de la sphere entre les trois arcs AE, ED, DA, de grands cercles qui se coupent nécessairement. Je dis *nécessairement*, parceque deux grands cercles d'une même sphere, qui ne coïncident pas, c'est-à-dire qui ne forment pas un seul et même cercle, passant l'un et l'autre par le centre, se coupent toujours. Les arcs AE, ED, DA sont les côtés du triangle.

II.

Les plans des grands cercles dont nous venons de parler forment ensemble, deux à deux, des angles qui sont ceux du triangle sphérique. Ces sortes d'angles se désignent, comme les angles rectilignes, par trois lettres, dont celle du milieu répond au sommet, ou par la seule lettre du sommet. Mais il faut bien se souvenir que par un angle, tel que DAE, il faut entendre l'angle que forment entre eux les plans des deux demi-cercles ADB, AFB, qui se coupent suivant le diametre AB, et auxquels appartiennent les côtés AE, AD de l'angle.

III.

Il suit de là, et de l'article 314, que si, par le centre C de la sphere, on mene perpendiculairement au diametre AB le cercle FMK, l'arc FM compris entre les deux demi-circonférences AFB, AMB, sera la mesure de l'angle EAD. Car, en tirant les rayons CF, CM, ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au même point C de la section commune AB des deux plans ABF, ABM; et par conséquent l'angle formé

par ces deux plans, ou l'angle A, a même mesure que l'angle rectiligne FCM, mesure qui est l'arc FM.

Les mesures des deux autres angles sphériques E et D, se détermineront de la même maniere.

IV.

Lorsque les plans de deux grands cercles qui forment un angle sphérique sont perpendiculaires entre eux, cet angle est droit. Par exemple, si le plan ABD est perpendiculaire au plan ABF, l'angle sphérique DAE sera droit. Alors, en considérant l'angle A, comme l'angle principal du triangle, on dira que le triangle sphérique est rectangle en A. Lorsqu'on désigne ces sortes de triangles par trois lettres, on met au milieu celle qui appartient à l'angle droit.

Il peut se faire qu'un triangle sphérique ait deux ou même trois angles droits. Ainsi, par exemple, le triangle sphérique AFM a d'abord deux angles droits F et M, et trois lorsque le plan ABD est perpendiculaire au plan ABF.

V.

Un triangle spérique, qui a deux côtés égaux est *isoscele*; celui qui a ses trois côtés égaux est *équilatéral*; celui qui a ses trois côtés inégaux est *scalene*. On voit que ces dénominations sont les mêmes que pour les triangles rectilignes.

Le côté opposé à un angle droit s'appelle *hypoténuse*, comme pour les triangles rectilignes.

396. Problême. *Déterminer la surface d'un triangle sphérique quelconque.*

Comme ce problême comprend plusieurs cas, je vais les traiter successivement et par gradation, afin de rendre la solution aussi claire qu'il sera possible.

I.

Considérons d'abord le triangle isoscele FAM, formé par les deux quarts de circonférence AF, AM, et l'arc quelconque FM : la surface de ce triangle est exprimée par AC × FM (394).

I.

Sur les deux demi-circonférences AFB, ADB, prenons les arcs égaux opposés AN, BQ ; et menons l'arc NQ de grand cercle : nous aurons deux triangles sphériques ANQ, BQN, parfaitement égaux, puisque si l'on les appliquoit l'un sur l'autre ils se conviendroient en tout. Et, comme ils forment par leur ensemble la surface du fuseau sphérique ADBFA, dont l'expression est AB × FM, ou 2AC × FM, il s'ensuit que la surface du triangle sphérique ANQ, ou BQN, a pour expression AC × FM. D'où l'on voit que *lorsqu'un triangle sphérique* ANQ, *a pour côtés contigus à un même angle* A, *deux arcs qui, pris ensemble, composent une demi-circonférence, la surface de ce triangle est égale au produit du rayon de la sphere, par l'arc qui mesure cet angle.*

III.

Soit maintenant le triangle sphérique quelconque AED. Menons par le point D l'arc de grand cercle DS perpendiculaire au grand cercle AFBK : le triangle proposé AED sera égal à la différence des deux triangles rectangles ASD, ESD ; il seroit égal à leur somme, si le point S tomboit entre les points A et E : mais, comme le raisonnement est le même dans l'un et l'autre cas ; puisque l'objet est ici de trouver la surface d'un triangle sphérique rectangle quelconque, bornons-nous à considérer le cas que notre Figure représente, et cherchons les surfaces des deux triangles rectangles ASD, ESD.

IV.

Je rends l'arc SI égal à l'arc AS, et je mene l'arc DI de grand cercle ; ce qui me donne les deux triangles rectangles ASD, ISD parfaitement égaux, de sorte que l'arc DI est égal à l'arc DA, et que la surface du triangle ASD est la moitié de la surface du triangle isoscele ADI, qui a pour base l'arc ASI, et pour côtés les arcs égaux DA, DI. Or, si l'on prolonge les arcs ASI, AD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en B, les arcs ASIB, ADB seront des demi-circonférences égales. Donc, à cause de DI=DA, les deux arcs DB, DI, pris ensemble, valent une demi-circonférence. Ainsi, en nommant P l'arc de grand cercle, qui serviroit de mesure à l'angle D du triangle IDB, la surface de ce triangle sera exprimée par AC × P (n°. II). Retranchons cette expression de celle de la portion de fuseau sphérique ASBDA, laquelle a pour valeur 2AC × A (n°. I), en nommant A l'arc de grand cercle qui mesure l'angle A : le reste 2AC × A—AC × P, ou AC × (2A—P), sera l'expression de la surface du triangle isoscele ADI, ou le double de l'expression de la surface du triangle rectangle ASD ; et par conséquent l'expression de la surface de ce dernier triangle sera $AC \times \left(A - \frac{P}{2}\right)$. Et comme les deux angles plans de suite BDI, IDA, pris ensemble, valent deux angles droits (315), et ont par conséquent pour mesure la demi-circonférence ; si l'on nomme C la circonférence d'un grand cercle de la sphere, V l'arc de grand cercle qui mesure l'angle ADS, et par conséquent 2V l'arc qui mesure l'angle IDA double de l'angle ADS, on aura $P = \frac{C}{2} - 2V$, et $\frac{P}{2} = \frac{C}{4} - V$. Donc l'aire du triangle ASD $= AC \times \left(A + V - \frac{C}{4}\right) = AC \times \left(A + \frac{C}{4} + V - \frac{C}{2}\right)$. Or A, $\frac{C}{4}$, V, expriment respectivement les mesures des trois angles A, S, D du triangle rectangle ASD. Ainsi *la surface d'un triangle rectangle sphérique est égale au produit du rayon*

400. *Corollaire III.* En retranchant de la solidité du secteur COAM, celle du cône COM, le reste sera le segment sphérique OMA, dont la valeur sera par conséquent $\pi \times (AC)^2 \times \frac{2}{3} AN - \pi \times (ON)^2 \times \frac{CN}{3}$. Substituons pour (ON) sa valeur $AN \times (2AC - AN)$ (190), et pour CN sa valeur $AC - AN$; l'expression précédente deviendra $\frac{\pi \times [(AN)^2 \times 3AC - (AN)^3]}{3}$, ou $\pi \times (AN)^2 \times \left(AC - \frac{AN}{3}\right)$. Par où l'on voit que *la solidité du segment sphérique est égale à celle d'un cylindre qui auroit pour rayon de sa base la fleche de la calotte du segment, et pour hauteur l'excès du rayon de la sphere sur le tiers de la fleche.*

CHAPITRE V.

Comparaison des surfaces et des solidités des corps semblables.

401. Deux corps ou deux solides sont *semblables*, en général, lorsqu'ils sont terminés par un même nombre de faces semblables, chacune à chacune, et semblablement disposés, chacune par rapport à chacune.

402. *Corollaire I.* D'après cette définition, représentons-nous, au-dedans d'un corps terminé par un nombre quelconque de faces finies, ou infiniment petites, un point qui serve de sommet commun à des pyramides qui ont pour bases les faces du corps; imaginons ensuite que chaque pyramide soit coupée parallèlement à sa base, de telle maniere que deux pyramides aient une arête commune au sommet et à la base : l'assemblage des pyramides intérieures formera un solide semblable au solide proposé, puisque ces deux solides ont la condition requise par la définition.

403. *Corollaire II.* On voit par là :

1°. Que deux prismes droits sont semblables, lorsque leurs bases sont des polygones semblables, et que leurs hauteurs sont entre elles comme deux côtés homologues, ou deux lignes homologues des bases.

2°. Deux cylindres droits sont semblables, lorsque leurs hauteurs sont comme les rayons ou les diametres des bases.

3°. Deux prismes obliques sont semblables, lorsqu'ils ont pour bases des polygones semblables, qu'ils sont semblablement inclinés par rapport à ces bases, et que leurs directrices ou leurs hauteurs sont comme deux côtés ou deux lignes homologues des bases.

4°. Deux cylindres obliques sont semblables, lorsqu'ils sont également inclinés, et que leurs côtés ou leurs hauteurs sont comme les rayons ou les diametres des cercles qui leur servent de bases.

5°. Deux pyramides régulieres sont semblables, lorsque leurs bases sont semblables, et que leurs apothêmes sont comme les apothêmes des bases, ou les arêtes comme les rayons des cercles circonscrits aux bases.

6°. Deux cônes droits sont semblables, lorsque leurs hauteurs ou leurs côtés sont comme les rayons ou les diametres des cercles qui en sont les bases.

7°. Deux pyramides quelconques sont semblables, lorsqu'elles ont pour bases des polygones semblables, qu'elles sont semblablement inclinées ou disposées par rapport à leurs bases, et que deux arêtes homologues ou les deux hauteurs sont comme deux lignes homologues des bases.

8°. Deux cônes obliques sont semblables, lorsqu'ils sont également inclinés, et que deux côtés homologues sont comme les rayons ou les diametres des cercles qui en sont les bases.

9°. Deux spheres sont toujours des solides semblables, etc.

En effet, si l'on imagine que, des deux solides comparés, le plus petit est placé au-dedans du plus grand, de maniere que le même point représente tout-à-la-fois deux points cor-

respondants dans les deux solides, c'est-à-dire deux points placés aux milieux, ou aux tiers, ou aux quarts, etc., de deux lignes correspondantes : on verra que ces deux solides pourront être regardés comme composés d'un même nombre de faces semblables et semblablement situées, puisque ces faces auront évidemment tous les angles égaux, et les côtés proportionnels autour de ces angles, et que de plus elles seront arrangées dans le même ordre autour du point proposé.

404. Théorême I. *Les surfaces de deux pyramides semblables sont entre elles comme les quarrés de deux lignes homologues dans les deux pyramides.*

Deux pyramides semblables peuvent être représentées par les deux pyramides SABCDE, S*abcde* (Fig. 213), dont la plus petite fait partie de la plus grande, et dont les bases sont paralleles. Or (356) les deux polygones ABCDE, *abcde*, étant semblables, et tous les triangles ASB, BSC, CSD, etc., étant semblables chacun à chacun des triangles *aSb*, *bSc*, *cSd*, etc., on a cette suite de rapports égaux,

$$\begin{aligned} \text{ABCDE} : abcde &:: (\text{AB})^2 : (ab)^2, \\ \text{ASB} : aSb &:: (\text{AB})^2 : (ab)^2, \\ \text{BSC} : bSc :: (\text{BC})^2 : (bc)^2 &:: (\text{AB})^2 : (ab)^2, \\ \text{CSD} : cSd :: (\text{CD})^2 : (cd)^2 &:: (\text{AB})^2 : (ab)^2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ainsi deux faces homologues quelconques dans les deux pyramides sont entre elles dans le rapport constant de $(\text{AB})^2$ à $(ab)^2$. Donc la somme des faces de la premiere pyramide, ou la surface entiere de cette pyramide, est à la somme des faces de la seconde, ou à la surface entiere de la seconde, comme le quarré d'une ligne quelconque de la premiere, est au quarré de la ligne homologue de la seconde.

On voit de même que deux portions correspondantes des surfaces de deux pyramides semblables sont entre elles comme les quarrés de deux lignes homologues.

405. *Corollaire.* Donc, en général, les surfaces de deux

solides semblables sont entre elles comme les quarrés de deux lignes homologues dans ces deux solides, puisqu'ils sont composés d'un même nombre de pyramides semblables deux à deux, et que, deux pyramides voisines ayant une arête commune au sommet ou à la base, il regne évidemment le même rapport entre les quarrés des lignes homologues, comparés chacun à chacun.

Par exemple, les surfaces de deux prismes semblables sont entre elles comme les quarrés de leurs hauteurs, ou de deux lignes homologues prises dans leurs bases; les surfaces de deux spheres sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres, etc.

406. Théorême II. *Les solides de deux pyramides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.*

Considérons encore les deux pyramides semblables SABCDE, S*abcde* (Fig. 213); et soient SO, S*o*, leurs hauteurs. On a ces deux proportions,

$$\text{ABCDE} : abcde :: (\text{AB})^2 : (ab)^2,$$
$$\text{SO} : \text{S}o :: \text{AB} : ab;$$

lesquelles étant multipliées par ordre donnent

$$\text{ABCDE} \times \text{SO} : abcde \times \text{S}o :: (\text{AB})^3 : (ab)^3;$$

et par conséquent $\frac{\text{ABCDE}\times\text{SO}}{3}$ (1re pyramide) : $\frac{abcde\times\text{S}o}{3}$ (2e pyramide) :: $(\text{AB})^3 : (ab)^3$.

407. *Corollaire.* Donc, en général, deux solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues; car deux solides semblables peuvent être regardés comme composés d'un même nombre de pyramides semblables. Et comme, dans chaque solide, d'une face à l'autre il y a une arête commune, on voit que chaque pyramide du premier solide est à la pyramide homologue du second dans le rapport constant du cube d'un côté du premier solide au cube du côté homologue du second. Donc la somme des pyramides qui composent le premier solide, ou ce solide

lui-même, est à la somme des pyramides qui composent le second, ou à ce solide lui-même, comme le cube d'un côté du premier solide est au cube du côté homologue du second.

Ainsi les solides de deux prismes semblables sont entre eux comme les cubes de leurs hauteurs, ou de deux lignes homologues prises dans leurs bases; les solides de deux spheres sont entre eux comme les cubes de leurs rayons ou de leurs diametres; etc.

408. Problême. *Un solide étant donné, construire un autre solide qui lui soit semblable, et qui ait avec lui un rapport donné.*

Nommons A un côté choisi à volonté dans le solide donné, x le côté homologue dans le solide cherché, $\frac{m}{n}$ le rapport du premier solide au second, on aura la proportion $A^3 : x^3 :: m : n$. D'où l'on tire $x = A \times \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$. Ainsi, pour avoir x, il faut multiplier A par la racine cube du rapport $\frac{n}{m}$ qui est un nombre abstrait.

409. *Corollaire.* Lorsque le nombre $\frac{n}{m}$ est un cube parfait, la construction du solide cherché s'exécute en rigueur et n'a aucune difficulté. Soit, par exemple, $\frac{n}{m} = 27$, et supposons que les deux solides soient des cubes; alors on a $x = A \times 3$. D'où l'on voit qu'en construisant un cube dont le côté soit triple du côté A du cube donné, le nouveau cube sera 27 fois aussi grand que le cube donné.

Mais si $\frac{n}{m}$ n'est pas un cube parfait, le problême ne peut pas se résoudre en rigueur, du moins en employant le seul secours de la regle et du compas. Supposons, par exemple, que les deux solides soient des cubes, et soit $\frac{n}{m} = 2$, en sorte qu'il s'agisse de faire un cube double

d'un autre, ce qui est le problême si célebre parmi les anciens géometres sous le nom de *duplication du cube;* alors on aura $x = A \times \sqrt[3]{2}$, expression qu'on ne peut assigner en rigueur par la géométrie élémentaire.

410. *Remarque.* L'expression dont il s'agit est celle de la premiere de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes A et 2A, qui sont dans le rapport de 1 à 2. En effet, soient y et z, ces deux moyennes proportionnelles, en sorte qu'on ait la progression $\dot{\dot{-}}$ A : y : z : 2A. Cette progression donne $A^3 : y^3 :: A : 2A :: 1 : 2$; d'où l'on tire $y = A \times \sqrt[3]{2}$, valeur qui est la même que celle qu'on a trouvée pour x.

CHAPITRE VI.

Des polyédres réguliers.

411. On a dit (289) qu'un polyédre régulier est celui qui est terminé par des polygones rectilignes réguliers, tous égaux et semblablement situés dans l'espace. Je donnerai à ces polygones le simple nom de *polygones terminateurs*, afin d'abréger le discours.

412. *Corollaire I.* Il suit de cette notion, que tous les angles solides d'un même polyédre régulier sont parfaitement égaux; qu'ils sont formés dans tous les cas par une suite de triangles isosceles égaux, qui s'assemblent autour d'un même point, et qui ont pour bases les côtés d'un polygone régulier, dont l'espece est subordonnée à celle du polyédre auquel appartient l'angle solide, comme on le verra tout-à-l'heure plus distinctement.

J'appellerai *pyramide polaire*, la pyramide réguliere, comprise entre les triangles latéraux de l'angle solide, et le polygone régulier sur lequel on peut concevoir qu'il

s'appuie : dénomination fondée sur ce que le sommet de l'angle solide, étant également éloigné de tous les points de la circonférence du cercle circonscrit au polygone dont on vient de parler, peut être regardé comme le *pole* de ces deux figures. On voit que dans tout polyédre régulier, il y a autant de pyramides polaires toutes égales, qu'il y a d'angles solides.

413. *Corollaire II.* De la parfaite égalité de tous les angles solides d'un même polyédre régulier, et de leur semblable position dans l'espace, il résulte :

1°. Qu'il existe dans tout polyédre régulier un point intérieur semblablement placé par rapport à tous les polygones terminateurs, c'est-à-dire également éloigné de tous les sommets des angles solides, lequel est par conséquent le centre d'une sphere circonscrite au polyédre.

2°. Que, si du centre de la sphere circonscrite on abaisse des perpendiculaires sur les polygones terminateurs, toutes ces perpendiculaires seront égales, et par conséquent les rayons d'une sphere inscrite au polyédre.

414. Théorême. *Il ne peut exister que cinq polyédres réguliers : savoir, trois dont les polygones terminateurs sont des triangles équilatéraux égaux, un dont les polygones terminateurs sont des quarrés égaux, et un dont les polygones terminateurs sont des pentagones réguliers égaux.*

En effet, tous les angles solides d'un polyédre régulier étant saillants, chacun d'eux doit être moindre, dans tous les cas, que 360 degrés (326); de plus, pour former un angle solide fermé, il faut employer, au moins, trois angles plans. Or, d'après ces deux principes, je dis qu'on ne peut employer à la formation des angles solides d'un polyédre régulier, que les trois sortes de polygones réguliers dont je viens de parler. Car :

1°. Chacun des angles d'un triangle équilatéral étant de 60 degrés, si l'on emploie, ou trois de ces angles, ou quatre, ou cinq, on aura un angle solide, ou de 180 de-

grés, ou de 240, ou de 300 : valeurs qui sont toutes admissibles, de sorte qu'il peut exister trois polyédres réguliers qui ont des triangles équilatéraux égaux pour polygones terminateurs ; mais on ne peut pas employer un plus grand nombre d'angles de 60 degrés ; car six angles donneroient 360 degrés, et dès-lors il n'y auroit qu'un simple cercle, aucun angle solide. A plus forte raison, il est impossible d'employer un plus grand nombre d'angles de 60 degrés.

2°. En employant trois angles de 90 degrés, valeur de l'angle du quarré, on aura un angle solide de 270 degrés, qui est dans la limite requise ; mais on ne peut pas employer plus de trois de ces angles. Il n'y a donc qu'un seul polyédre régulier dont les polygones terminateurs soient des quarrés.

3°. En employant trois angles de 108 degrés, valeur de l'angle du pentagone régulier, on a un angle solide de 324 degrés, qui est encore dans la limite exigée ; mais on ne peut pas employer un plus grand nombre d'angles de 108 degrés ; et par conséquent il n'y a qu'un seul polyédre régulier dont les polygones terminateurs seront des pentagones réguliers.

D'après ces considérations, il faut conclure que tous les polygones réguliers qui ont plus de cinq côtés, ne peuvent pas être employés à former les angles solides d'un polyédre régulier, et que par conséquent il ne peut exister en tout que les cinq polyédres réguliers dont nous avons fait mention.

415. Problême I. *Déterminer le nombre et la position des polygones terminateurs des cinq polyédres réguliers.*

1°. Assemblons autour d'un point S (Fig. 235), trois triangles équilatéraux égaux SAB, SBC, SCA ; nous aurons un angle solide de 180 degrés, qui s'appuiera sur le triangle équilatéral ABC, égal à chacun des trois autres. Le polyédre terminé par ces quatre triangles, qui sont égaux et semblablement situés dans l'espace, est un *tetraédre régulier.*

On voit qu'ici la pyramide polaire se confond avec le tetraédre entier.

2°. Plaçons d'abord autour du point S (Fig. 236), quatre angles de quatre triangles équilatéraux égaux SAB, SBC, SCD, SDA; nous formerons par-là un angle solide de 240 degrés, et la pyramide polaire SABCD, qui aura pour base le quarré ABCD, dont chaque côté est égal à l'un des côtés des triangles latéraux : ensuite à cette pyramide, opposons en une autre S'ABCD, qui lui soit égale en tout : la réunion de ces deux pyramides composera un *octaédre régulier.*

3°. Commençons par assembler autour du point S (Fig. 237), cinq angles de cinq triangles équilatéraux égaux SAB, SBC, SCD, SDE, SEA; nous aurons un angle solide de 300 degrés, et une pyramide polaire SABCDE, qui aura pour faces latérales ces cinq triangles, et pour base le pentagone régulier ABCDE; établissons sur les côtés AB, BC, CD, etc., de ce pentagone, cinq triangles équilatéraux AA'B, BB'C, CC'D, etc., égaux aux précédents, et faisons tourner du dehors au-dedans, par un mouvement de charniere, ces triangles autour des côtés AB, BC, CD, etc., regardés comme immobiles, jusqu'à ce que les angles A'BB', B'CC', C'DD', etc., deviennent chacun de 60 degrés; ensuite menons les droites A'B', B'C', C'D', etc.: nous aurons cinq nouveaux triangles équilatéraux A'BB', B'CC', C'DD', etc., égaux aux précédents : alors l'assemblage des dix triangles équilatéraux AA'B, BB'C, CC'D, etc., A'BB', B'CC', C'DD', etc., formera la surface convexe réguliere d'une zone, dont les bases opposées sont les deux pentagones réguliers égaux ABCDE, A'B'C'D'E'. Enfin appliquons sur la base A'B'C'D'E' une pyramide polaire égale en tout à la premiere SABCDE, et posée en sens contraire. Le polyédre résultant de la réunion de ces deux pyramides avec le solide couvert latéralement par la zone proposée, sera un polyédre régulier, terminé par vingt triangles équilatéraux égaux, ou un *icosaédre régulier.*

4°. Assemblons autour du point S (Fig. 238) trois angles de trois quarrés égaux SABC, SCDE, SEFA; nous aurons

un angle solide de 270 degrés, et une pyramide polaire SACE dont la base est le triangle équilatéral ACE qui a pour côtés les diagonales AC, CE, EA des trois quarrés proposés; à cette pyramide, opposons-en une autre S'BFD, qui lui soit égale en tout. La réunion de ces deux pyramides composera un *exaédre régulier*, ou un *cube*, solide qui est terminé par six quarrés égaux.

5°. Enfin soient six pentagones réguliers égaux, assemblés d'abord entre eux comme la Fig. 239 le représente. Imaginons que le pentagone central ABCDE demeurant immobile (par exemple, dans une position horizontale, pour fixer les idées), on fasse tourner les autres pentagones de bas en haut, sur les côtés AB, BC, CD, etc., comme charnieres, jusqu'à ce que les points F et G, H et I, etc., viennent se confondre: on formera par-là une espece de mortier ouvert par en haut, lequel pourra être couvert par un autre mortier qui lui soit parfaitement égal, et posé en sens contraire. Alors l'assemblage de ces deux mortiers composera un polyédre régulier, terminé par douze pentagones réguliers, ou un *dodécaédre* régulier.

On voit qu'ici chaque angle solide a pour faces latérales trois triangles isosceles égaux au triangle BAE, et que chaque pyramide polaire a pour base un triangle équilatéral dont un côté est égal à la diagonale BE du pentagone ABCDE.

416. Problème II. *Etant donné le côté de l'un des polygones terminateurs d'un polyédre régulier, déterminer,* 1°. *le diametre ou le rayon de la sphere circonscrite à ce polyédre;* 2°. *le rayon de la sphere inscrite.*

1°. Du sommet de l'un des angles solides du polyédre, menons perpendiculairement à la base de la pyramide polaire une droite qui passera évidemment par le centre du cercle circonscrit à cette base, et par le centre de la sphere. Faisons ensuite passer un plan, par la perpendiculaire proposée, et par l'une des arêtes de la pyramide: l'intersection de ce plan avec la sphere sera un grand cercle de ce solide; et, par conséquent (190), le diametre de ce cercle, ou de la sphere, sera égal au quarré de l'arête, ou au quarré de

l'un des côtés des polygones terminateurs, divisé par la hauteur de la pyramide. Et comme dans cette pyramide l'arête est donnée immédiatement, on voit (365) que la question est ici seulement de trouver le rayon du cercle circonscrit à la base de la pyramide. Or, on trouve le rayon du cercle dont il s'agit dans le tetraédre régulier, par l'article 228; dans l'octaédre régulier, par l'article 189; dans l'icosaédre régulier, par l'article 239; dans l'exaédre régulier, par l'article 189; et enfin, dans le dodecaédre régulier, par les articles 240 et 228. On a donc tout ce qui est nécessaire pour déterminer le rayon de la sphere circonscrite.

2°. En considérant le centre commun à la sphere circonscrite et à la sphere inscrite, comme le sommet d'une pyramide réguliere qui a pour base l'un des polygones terminateurs du polyédre, et pour hauteur le rayon de la sphere inscrite; on voit qu'on aura ce rayon, en retranchant du quarré du rayon de la sphere circonscrite, le quarré du rayon du cercle circonscrit à l'un des polygones terminateurs, puis tirant la racine quarrée du reste.

Je n'ai pas besoin de faire observer que si, au lieu de donner primitivement, comme on a fait, l'un des côtés des polygones terminateurs, on donnoit le rayon de la sphere circonscrite, ou celui de la sphere inscrite, on trouveroit l'un des côtés des polygones terminateurs, par les mêmes calculs, en regardant maintenant ce côté comme l'inconnue.

417. Problême III. *Connoissant l'un des côtés des polygones terminateurs d'un polyédre régulier, déterminer la surface et la solidité de ce polyédre.*

1°. La surface totale du polyédre est la somme des surfaces de tous ses polygones terminateurs, qui, étant donnés, ont aussi des surfaces données ou déterminables par le moyen des côtés.

2°. La solidité est la somme de toutes les pyramides régulieres qui ont pour bases les polygones terminateurs, et pour hauteur commune le rayon de la sphere inscrite : éléments déterminables par le moyen des côtés des polygones terminateurs.

418. Problême IV. *Déterminer, dans un polyédre régulier, l'angle plan que forment entre elles deux faces latérales contigües d'un angle solide.*

La considération d'une pyramide polaire et l'application de l'article 327 fournissent facilement la solution de ce problême. En effet, dans le tetraédre, l'exaédre, le dodecaédre réguliers, les pyramides polaires sont des pyramides triangulaires où tout est donné ; et par conséquent l'angle en question se détermine immédiatement par l'article 327 ; dans l'octaédre, la pyramide polaire a pour base un quarré ; mais elle peut être partagée en deux pyramides triangulaires données en tout ; ce qui rappelle la question à l'article 327 ; enfin dans l'icosaédre, si l'on mene (Fig. 237), par le sommet S et par la diagonale BE, un plan, on aura une pyramide triangulaire SABE, où tout sera donné ; ce qui rappelle également la question à l'article 327.

419. *Scholie.* Deux polyédres réguliers, terminés par un même nombre de polygones réguliers semblables, étant, comme on voit, des solides semblables, on leur appliquera ce qui a été dit en général dans le chapitre précédent sur la comparaison des surfaces et des solidités de deux solides semblables.

QUATRIEME PARTIE.

DE LA TRIGONOMÉTRIE.

420. La *trigonométrie* est une branche de la géométrie, qui a pour objet particulier *la résolution des triangles*, c'est-à-dire l'art de trouver les relations que les angles et les côtés d'un triangle ont ensemble.

On la divise en deux parties : l'une nommée trigonométrie *plane* ou *rectiligne*, qui considere les triangles rectilignes ; l'autre, nommée trigonométrie *sphérique*, qui considere les triangles sphériques.

SECTION I.

De la trigonométrie rectiligne.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de la trigonométrie rectiligne.

421. Si, parmi ces six choses, trois angles et trois côtés, qui forment un triangle rectiligne, on en connoît trois quelconques, la trigonométrie enseigne à trouver les trois autres, ou *du moins leurs rapports* : j'ajoute cette restriction, parceque si les trois angles étoient les trois choses connues, on ne pourroit déterminer que les rapports des côtés, et non pas leurs grandeurs absolues ; et, en effet, tous les triangles semblables (quelles que soient d'ailleurs les longueurs des côtés),

ayant les trois angles égaux chacun à chacun, il est clair que la simple connoissance des angles n'est pas suffisante pour conduire à celle de l'espece particuliere du triangle. Mais si, parmi les trois choses connues, il se trouve un ou plusieurs côtés, on pourra déterminer les valeurs absolues des trois autres choses, comme nous le verrons ci-dessous.

La trigonométrie, au lieu d'employer dans le calcul des angles les arcs qui en sont les mesures, emploie plusieurs autres lignes plus commodes, qui en dépendent, et que nous ferons connoître successivement, en commençant par les notions les plus simples.

422. Soient (Fig. 240) ACB, BCI, deux angles de suite : ces deux angles, qui, pris ensemble, valent 180 degrés, s'appellent *suppléments* l'un de l'autre. Et si, par le point C, on éleve CF perpendiculaire à la droite AI, les deux angles ACB, BCF, qui, pris ensemble, valent un angle droit, ou 90 degrés, s'appellent *compléments* l'un de l'autre.

423. Du point C, comme centre, avec un rayon CA, arbitraire, mais qu'il faut toujours regarder comme une quantité connue, soit décrite une circonférence de cercle : les arcs AB, BF, BFI, seront les mesures des angles ACB, BCF, BCI; et, dans le langage trigonométrique, par un angle, ou par l'arc qui en est la mesure pour un rayon déterminé, on entend la même chose.

424. De l'extrémité B de l'arc AB, ou FB, soit abaissée la perpendiculaire BD, ou BH, sur le rayon CA, ou CF, qui passe par l'autre extrémité de l'arc ; par les points A et F soit menées aux arcs AB, FB, les tangentes AE, FG, terminées l'une et l'autre par le prolongement du rayon CB. Cela posé, on appelle,

BD *sinus droit ou sinus*
AD *sinus verse*
AE *tangente*
CE *sécante*

} de l'arc AB, ou de l'angle ACB.

BH *sinus*
FH *sinus verse*
FG *tangente*
CG *sécante*
} de l'arc BF, ou de l'angle BCF.

425. En regardant AB comme l'arc principal, et en lui rapportant les lignes BH, FH, FG, CG, on dit que

BH ou DC est le *sinus du complément*, ou, par abréviation, le *cosinus*
FH est le *sinus verse du complément*, ou le *cosinus verse*
FG est la *tangente du complément*, ou la *cotangente*
CG est la *sécante du complément*, ou la *cosécante*
} de l'arc AB, ou de l'angle ACB.

Si on regardoit FB comme l'arc principal, BD ou HC seroit son *cosinus*, AD son *cosinus verse*, AE sa *cotangente*, CE sa *cosécante*.

426. On voit que le quart AF de circonférence a pour sinus le rayon même FC du cercle. Ce sinus est le plus grand de tous; et par cette raison on l'appelle le *sinus total*. Ainsi le *rayon* du cercle dont les arcs mesurent les angles et le *sinus total* sont des mots synonymes.

427. Les arcs, les sinus, les cosinus, les tangentes, etc. étant des quantités sujettes à changer de position, et par conséquent de signes, il convient de les rapporter à deux lignes fixes, ou, comme on dit, à deux *axes*, qui serviront à faire connoître d'une maniere évidente et sûre toutes leurs variations respectives. Or je prends pour ces deux axes les deux diametres AI, FV, qui se coupent perpendiculairement, et je fais partir tous les arcs de la même origine A.

428. Cela posé, 1°. je regarde comme positifs tous les arcs AB, AF*b*, qui vont dans le sens AFI: par conséquent il fau-

dra regarder comme négatifs les arcs AK, AN, qui vont dans le sens opposé.

2°. Je regarde comme positives toutes les lignes placées au-dessus de l'axe AI et perpendiculaires à cet axe; par conséquent il faudra regarder comme négatives les lignes de même nature posées en sens contraire.

3°. Je regarde comme positives toutes les lignes placées à la gauche de FV et perpendiculaires à cet axe; par conséquent il faudra regarder comme négatives les lignes de même nature posées en sens contraire, à la droite du même axe FV.

De ces principes et de ces hypotheses résultent plusieurs conséquences dont je vais développer au moins les principales.

429. Les sinus BD, FC, *bd*, des arcs AB, AF, AF*b*, tous posés au-dessus de AI, sont positifs; et les sinus KD, NP, des arcs AK, AN, posés au-dessous de AI, sont négatifs.

430. Deux arcs AB, AF*b*, qui, pris ensemble, valent 180°, ou qui sont suppléments l'un de l'autre, ont des sinus BD, *bd*, égaux et de même signe.

431. L'arc positif AB, et l'arc négatif AVIFB qui, joint à AB, vaut la circonférence entiere du cercle, ont le même sinus BD, qui est positif.

L'arc positif AFIN, qui se termine à la demi-circonférence inférieure AVI, a pour sinus NP, quantité négative, qui est aussi le sinus de l'arc négatif AN, qui, joint à l'arc AFIN, vaut la circonférence entiere du cercle.

On verra de même, dans toute autre combinaison, que deux arcs, l'un positif, l'autre négatif, qui, pris ensemble, valent la circonférence entiere du cercle, ont le même sinus en quantité et en signe.

432. Deux arcs positifs, qui, pris ensemble, valent la circonférence entiere, ont des sinus égaux, mais de signes

contraires ; tels sont les arcs AB, AFIVK, qui ont respectivement pour sinus les lignes égales et opposées BD, KD, la premiere positive, la seconde négative.

De même, deux arcs négatifs, qui, pris ensemble, valent la circonférence, ont des sinus égaux, mais de signes contraires ; tels sont les arcs AK, AVIFB, qui ont pour sinus les lignes égales et opposées KD, BD, la premiere négative, la seconde positive.

433. En général on ne sera jamais embarrassé sur les signes des sinus si l'on se rappelle cette simple regle. Tous les arcs qui se terminent à la demi-circonférence AFI ont des sinus positifs ; et ceux qui se terminent à la demi-circonférence AVI ont des sinus négatifs. Quant aux valeurs des sinus, nous apprendrons ci-dessous à les déterminer en parties du rayon.

434. Le cosinus CD de l'arc positif AB, moindre qu'un quart de circonférence, est positif ; et pareillement le cosinus CR de l'arc négatif AS, moindre qu'un quart de circonférence, est positif. On voit en même temps par-là que deux arcs égaux, AB, AK, l'un positif, l'autre négatif, et moindres chacun qu'un quart de circonférence, ont le même cosinus CD, qui est positif.

435. Deux arcs AB, AF*b*, qui, pris ensemble, valent 180°, ont des cosinus égaux CD, C*d*, mais de signes contraires. De là on voit aussi qu'un arc positif ou négatif, plus grand qu'un quart de circonférence, et moindre que la demi-circonférence, a un cosinus négatif, qui est égal en quantité au cosinus positif de son supplément.

436. Deux arcs qui, pris ensemble, valent la circonférence, ont le même cosinus, soit que de ces deux arcs l'un soit positif, l'autre négatif ; soit qu'ils soient tous deux positifs, ou tous deux négatifs. C'est ce qu'on voit par les arcs AB et AVIFB, AB et ABFIVK, AK et AFIVK.

437. La regle pour déterminer en général les signes des cosinus est la même que pour les sinus. Tous les arcs qui se terminent à la demi-circonférence FAV ont des cosinus positifs ; et ceux qui se terminent à la demi-circonférence FIV ont des cosinus négatifs. Nous déterminerons ci-dessous les quantités des cosinus en parties du rayon.

438. Ajoutons encore concernant les sinus et les cosinus quelques propositions utiles, qui dérivent immédiatement des notions précédentes.

Je nomme en général R le rayon du cercle qui sert à mesurer les angles (dénomination qui sera constamment employée dans toute la suite) ; j'appelle de plus ici C sa circonférence, A un arc quelconque. On aura :

1°. Sin. $-A = -$ sin. A ; et cos. $-A =$ cos. A. En effet KD = BD ; et CD est le cosinus commun des deux arcs égaux AK, AB. Il en est de même, quelle que soit la valeur de l'arc A.

2°. L'arc A pouvant augmenter depuis zéro jusqu'à l'infini, supposons qu'il devienne successivement o, $\frac{C}{4}$, $\frac{C}{2}$, $\frac{3}{4}$C, C+$\frac{1}{4}$C, C+$\frac{1}{2}$C, C+$\frac{3}{4}$C, 2C, etc. ; nous aurons :

Sin. o = o ; sin. $\frac{C}{4}$ = R ; sin. $\frac{C}{2}$ = o ; sin. $\frac{3}{4}$C = $-$R ; sin. C = o ; sin. (C+$\frac{1}{4}$C) = R ; sin. (C+$\frac{1}{2}$C) = o ; sin. (C+$\frac{3}{4}$C) = $-$R ; sin. 2C = o ; ainsi de suite.

Semblablement, cos. o = R ; cos. $\frac{C}{4}$ = o ; cos. $\frac{C}{2}$ = $-$R ; cos. $\frac{3}{4}$C = o ; cos. C = R ; cos. (C+$\frac{1}{4}$C) = o ; cos. (C+$\frac{1}{2}$C) = $-$R ; cos. (C+$\frac{3}{4}$C) = o ; cos. 2C = R, etc.

439. Qu'à un arc quelconque A on ajoute tant de fois qu'on voudra la circonférence ; il est évident que le sinus et le cosinus demeurent toujours les mêmes en quantités et en signes, puisqu'on vient toujours retomber sur les mêmes points. On a donc identiquement sin. (A + nC) = sin A ;

et cos. $(A + nC) = \cos. A$, n étant un nombre entier positif quelconque.

440. De là on trouve tout de suite le sinus et le cosinus de la somme d'un arc A et d'un multiple quelconque impair de la *demi-circonférence* : car cette somme peut toujours être représentée par $A + \frac{C}{2} + pC$, p étant un nombre entier positif quelconque. Ainsi, en désignant par la simple lettre B la partie $A + \frac{C}{2}$, il s'agit de trouver sin. $(B + pC)$ et cos. $(B + pC)$. Or, par l'article précédent, sin. $(B + pC) = \text{sin. } B = \text{sin.} \left(A + \frac{C}{2}\right)$; et cos. $(B + pC) = \text{cos. } B = \text{cos.} \left(A + \frac{C}{2}\right)$. Mais d'un autre côté, en jetant les yeux sur la *Figure* 240, on voit que sin. $(A + \frac{1}{2}C) = -\text{sin. } A$, et que cos. $(A + \frac{1}{2}C) = -\text{cos. } A$. Ainsi sin. $\left(A + \frac{C}{2} + pC\right) = -\text{sin. } A$; et cos. $\left(A + \frac{C}{2} + pC\right) = -\text{cos. } A$.

441 Les moyens que nous avons employés pour déterminer les signes des sinus et des cosinus s'appliquent avec la même facilité aux tangentes et aux cotangentes. En effet les tangentes ont des positions analogues à celles des sinus par rapport à l'axe AI ; et les cotangentes ont des positions analogues à celles des cosinus par rapport à l'axe FV.

De là les tangentes de tous les arcs AB, moindres que le quart AF de circonférence, sont positives ; et les tangentes de tous les arcs négatifs AS, moindres que le quart de circonférence AV, sont négatives.

La tangente de l'arc positif AF*b*, plus grand qu'un quart de circonférence et moindre que la demi-circonférence, est négative et représentée par AT, tangente de l'arc négatif AK, qui est le supplément de l'arc AF*b*.

La tangente d'un arc AFIL, plus grand que la demi-circonférence et moindre que les trois quarts de la circonférence, est AE, quantité positive, qui est la tangente

de l'arc positif AB, excès de l'arc AFIL sur la demi-circonférence.

La tangente d'un arc négatif AN, plus grand que le quart AV de circonférence, et moindre que la demi-circonférence, est positive ; et la tangente de l'arc négatif AVI*b*, plus grand que la demi-circonférence et moindre que les trois quarts de la circonférence, est négative.

Ainsi des autres. Mêmes procédés et mêmes remarques pour les cotangentes.

442. Quant aux sécantes et aux cosécantes, qui n'ont pas des positions fixes par rapport à nos deux axes AI, FV, la maniere la plus courte et la plus commode d'en déterminer les signes, est d'y faire servir ceux des sinus et des cosinus, quantités par le moyen desquelles les sécantes et les cosécantes peuvent toujours s'exprimer, comme on le verra dans le chapitre suivant. La même remarque est aussi applicable aux tangentes et cotangentes.

443. Dans le calcul trigonométrique des angles et des côtés d'un triangle ; au lieu d'employer immédiatement les arcs qui sont la mesure des angles, on emploie leurs sinus, cosinus, tangentes, etc. ; ce qui est plus simple et plus commode. Ainsi les regles que nous allons donner supposent que l'on connoisse en parties du rayon les valeurs des sinus, cosinus, etc. pour toutes sortes d'arcs. Nous commencerons donc par enseigner la maniere de déterminer ces lignes, et de dresser des tables de leurs valeurs et des logarithmes de ces mêmes valeurs ; ensuite nous expliquerons l'usage de ces tables.

CHAPITRE II.

Détermination des sinus, cosinus, tangentes, etc. par le moyen du rayon.

444. Théorême I. *Le sinus d'un arc est la moitié de la corde de l'arc double.*

Prolongez le sinus BD de l'arc BA jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en K. Les deux droites CA, BK, étant perpendiculaires entre elles, le point D est le milieu de BK, et le point A est le milieu de l'arc BAK (87). Donc le sinus BD de l'arc AB est la moitié de la corde BK, qui soustend l'arc BAK double de l'arc AB.

445. *Corollaire.* Donc, si l'on connoît la corde d'un arc, on aura le sinus de la moitié de cet arc en prenant la moitié de la corde.

Il y a plusieurs arcs dont on connoît les cordes. Par exemple, la corde de 60 degrés est égale au rayon ; ainsi le sinus d'un arc de 30 degrés est la moitié du rayon.

La corde de 90 degrés est égale à $AC \times \sqrt{2}$; ainsi le sinus d'un arc de 45 degrés est $\frac{AC \times \sqrt{2}}{2}$, ou $\frac{AC}{\sqrt{2}}$, ou $AC \times 0,70711$ à-peu-près en évaluant $\sqrt{2}$ en parties décimales.

446. Problême I. *Etant donné le sinus* BD *d'un arc, trouver son cosinus* CD ; et réciproquement.

Dans le triangle rectangle CDB, on a $(CB)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$, ou $(CD)^2 = (CB)^2 - (BD)^2$; et par conséquent, en tirant la racine quarrée, $CD = \sqrt{[(CB)^2 - (BD)^2]}$; c'est-à-dire que *le cosinus est la racine quarrée de l'excès du quarré du rayon sur le quarré du sinus.*

Réciproquement *le sinus est la racine quarrée de l'excès*

du quarré du rayon sur le quarré du cosinus, puisque BD $= \sqrt{[(CB)^2 - (CD)^2]}$.

Le rayon est toujours une quantité fixe et donnée; et on voit que du sinus ou du cosinus, qui sont des quantités sujettes à varier, l'une étant donnée en parties du rayon, l'autre le sera également.

447. Problême II. *Etant donné le sinus* BD, *ou le cosinus* CD *d'un arc* AB, *déterminer le sinus verse, la tangente, la sécante, le cosinus verse, la cotangente, la cosécante.*

D'abord connoissant ou le sinus ou le cosinus, on aura, par le problême précédent, celle de ces deux lignes qui n'est pas donnée immédiatement. Ainsi nous les regardons l'une et l'autre comme connues.

Le rayon étant toujours représenté par R, nous appellerons, pour abréger, x l'arc AB; et nous partagerons la solution en différents numéro relatifs aux différentes choses qu'il s'agit de trouver.

I.

En retranchant du rayon le cosinus CD, le reste sera la valeur du sinus verse AD. Ainsi, sin. vers. $x = R -$ cos. x.

II.

Les deux triangles rectangles semblables CDB, CAE, donnent CD : DB :: CA : AE; ou cos. x : sin. x :: R : tang. $x = \frac{R \times \text{sin. } x}{\text{cos. } x}$. Ainsi *la tangente est quatrieme proportionnelle au cosinus, au sinus, et au rayon.*

III.

Les mêmes triangles donnent CD : CB :: CA : CE; ou cos. x : R :: R : séc. $x = \frac{R^2}{\text{cos. } x}$. Ainsi *la sécante est troisieme proportionnelle au cosinus et au rayon.*

IV.

Le cosinus verse FH est la différence du rayon et du sinus BD. Ainsi on a, cos. vers. $x = R - \sin. x$.

V.

Les triangles rectangles semblables CHB, CFG, donnent CH ou BD : BH ou CD :: CF : FG ; ou $\sin. x : \cos. x :: R : \text{cot. } x = \frac{R \times \cos. x}{\sin. x}$. Ainsi *la cotangente est quatrieme proportionnelle au sinus, au cosinus, et au rayon.*

VI.

Les mêmes triangles semblables donnent CH : CB :: CF : CG ; ou $\sin. x : R :: R : \text{coséc. } x = \frac{R^2}{\sin. x}$. Ainsi *la cosécante est troisieme proportionnelle au sinus et au rayon.*

448. *Corollaire.* Les tangentes de deux arcs différents x ou y, toujours pour le même rayon, sont entre elles en raison inverse des cotangentes des mêmes arcs. Car, tang. $x \times$ cotang. $x = R^2$; et semblablement tang. $y \times$ cotang. $y = R^2$. Donc, tang. x. cotang. $x =$ tang. y. cotang. y ; ce qui donne tang. x : tang. y :: cotang y : cotang. x.

449. Problème II. *Etant donnés les sinus* BD, EF, *de deux arcs* AB, BE, (Fig. 241), *trouver le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de ces arcs.*

Prenez l'arc BG égal à l'arc BE pour avoir l'arc AG égal à la différence des deux arcs proposés ; des points E et G abaissez les perpendiculaires EL, GH, sur le rayon CA. Il est clair que EL est le sinus de la somme de nos deux arcs, GH le sinus de leur différence, CL le cosinus de la somme, CH le cosinus de la différence. La question

est donc de trouver les valeurs des quatre lignes EL, GH, CL, CH.

Du point F menez FM perpendiculaire à CA, et FI perpendiculaire à EL, ou parallele à AC; tirez de plus, par le point G, la droite GK parallele à FI. Le point F étant le milieu de EG, le point I sera aussi le milieu de EK, à cause que les lignes EG, EK, sont coupées proportionnellement par les paralleles FI, GK. De même, le point M sera le milieu de HL, à cause que les lignes GE, HL, sont coupées proportionnellement par les paralleles FM, EL.

Nommons R le rayon, y l'arc AB, z l'arc BE. Cela posé, les triangles BDC, EIF, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, et qui sont par conséquent semblables, donnent ces deux proportions,

$$\text{CB}(R) : \text{CD}(\cos. y) :: \text{EF}(\sin. z) : \text{EI} = \frac{\cos. y \sin. z}{R},$$

$$\text{CB}(R) : \text{BD}(\sin. y) :: \text{EF}(\sin. z) : \text{FI} = \frac{\sin. y \sin. z}{R}.$$

Les triangles semblables CBD, CFM, donnent

$$\text{CB}(R) : \text{BD}(\sin. y) :: \text{CF}(\cos. z) : \text{FM} = \frac{\sin. y \cos. z}{R},$$

$$\text{CB}(R) : \text{CD}(\cos. y) :: \text{CF}(\cos. z) : \text{CM} = \frac{\cos. y \cos. z}{R}.$$

Donc (à cause de $\text{EL} = \text{IL} + \text{EI} = \text{FM} + \text{EI}$; de $\text{GH} = \text{KL} = \text{IL} - \text{IK} = \text{FM} - \text{EI}$; de $\text{CL} = \text{CM} - \text{FI}$; de $\text{CH} = \text{CM} + \text{MH} = \text{CM} + \text{FI}$), on aura ces quatre équations:

$$\text{I.} \quad \sin. (y+z) = \frac{\sin. y \cos. z + \cos. y \sin. z}{R},$$

$$\text{II.} \quad \sin. (y-z) = \frac{\sin. y \cos. z - \cos. y \sin. z}{R},$$

$$\text{III.} \quad \cos. (y+z) = \frac{\cos. y \cos. z - \sin. y \sin. z}{R},$$

$$\text{IV.} \quad \cos. (y-z) = \frac{\cos. y \cos. z + \sin. y \sin. z}{R}.$$

450. *Corollaire I.* En ajoutant ensemble les équations I et II, les équations III et IV, et en retranchant l'équa-

tion III de l'équation IV, on formera ces trois autres équations,

$$\text{I. } \sin.(y+z)+\sin.(y-z)=\frac{2\sin.y\cos.z}{R},$$

$$\text{II. } \cos.(y+z)+\cos.(y-z)=\frac{2\cos.y\cos.z}{R},$$

$$\text{III. } \cos.(y-z)-\cos.(y+z)=\frac{2\sin.y\sin.z}{R}.$$

451. *Corollaire II.* Supposons que les deux arcs y et z deviennent égaux; on aura $y-z=0$, $\sin.(y-z)=0$, $\cos.(y-z)=R$. Par conséquent les trois équations précédentes deviendront,

$$\text{I. } \sin.2y=\frac{2\sin.y\cos.y}{R},$$

$$\text{II. } \cos.2y+R=\frac{2(\cos.y)^2}{R}, \text{ ou } \cos.2y=\frac{2(\cos.y)^2-R^2}{R},$$

$$\text{III. } R-\cos.2y=\frac{2(\sin.y)^2}{R}, \text{ ou } \cos.2y=\frac{R^2-2(\sin.y)^2}{R}.$$

Comme, étant donné le sinus ou le cosinus, on détermine (446) celle de ces deux lignes qui n'est pas donnée immédiatement, nous voyons par ces nouvelles équations qu'étant donné le sinus ou le cosinus de l'arc simple, on connoîtra le sinus et le cosinus de l'arc double.

Réciproquement, si l'on connoissoit le sinus ou le cosinus de l'arc double, on connoîtroit aussi le sinus et le cosinus de l'arc simple; car nos deux dernieres équations donnent

$$\text{IV. } \cos.y=\sqrt{\left(\frac{R^2+R\cos.2y}{2}\right)}.$$

$$\text{V. } \sin.y=\sqrt{\left(\frac{R^2-R\cos.2y}{2}\right)}.$$

452. *Corollaire III.* Reprenons l'hypothese générale de l'article 449, où les arcs y et z sont quelconques. Puisqu'on a (447, n°. II, III, V, VI),

$$\cos.(y+z) : \sin.(y+z) :: R : \text{tang.}(y+z) = \frac{R \sin.(y+z)}{\cos.(y+z)},$$

$$\cos.(y+z) : R :: R : \text{séc.}(y+z) = \frac{R^2}{\cos.(y+z)},$$

$$\sin.(y+z) : \cos.(y+z) :: R : \cot.(y+z) = \frac{R \cos.(y+z)}{\sin.(y+z)},$$

$$\sin.(y+z) : R :: R : \text{coséc.}(y+z) = \frac{R^2}{\sin.(y+z)}:$$

On aura [en mettant pour $\sin.(y+z)$, $\cos.(y+z)$, leurs valeurs trouvées (449)],

$$\text{tang.}(y+z) = \frac{R(\sin.y \cos.z + \cos.y \sin.z)}{\cos.y \cos.z - \sin.y \sin.z},$$

$$\text{séc.}(y+z) = \frac{R^2}{\cos.y \cos.z - \sin.y \sin.z},$$

$$\cot.(y+z) = \frac{R(\cos.y \cos.z - \sin.y \sin.z)}{\sin.y \cos.z + \cos.y \sin.z},$$

$$\text{coséc.}(y+z) = \frac{R^2}{\sin.y \cos.z + \cos.y \sin.z}.$$

Ces quatre équations peuvent être écrites sous les formes suivantes,

$$\text{tang.}(y+z) = \frac{R\left(\frac{\sin.y}{\cos.y} + \frac{\sin.z}{\cos.z}\right)}{1 - \frac{\sin.y}{\cos.y} \cdot \frac{\sin.z}{\cos.z}},$$

$$\text{séc.}(y+z) = \frac{R^2 \times R^2}{R \cos.y \cos.z \cdot \left(1 - \frac{\sin.y}{\cos.y} \cdot \frac{\sin.z}{\cos.z}\right)},$$

$$\cot.(y+z) = \frac{R\left(1 - \frac{\sin.y}{\cos.y} \cdot \frac{\sin.z}{\cos.z}\right)}{\frac{\sin.y}{\cos.y} + \frac{\sin.z}{\cos.z}},$$

$$\text{coséc.}(y+z) = \frac{R^2 \times R^2}{R \cos.y \cos.z \cdot \left(\frac{\sin.y}{\cos.y} + \frac{\sin.z}{\cos.z}\right)}.$$

Mettant dans ces nouvelles équations, pour $\frac{\sin.y}{\cos.y}$

sa valeur $\frac{\text{tang. } y}{R}$ (447, n°. II), pour $\frac{\text{sin. } z}{\text{cos. } z}$ sa valeur $\frac{\text{tang. } z}{R}$, pour $\frac{R^2}{\text{cos. } y}$ sa valeur séc. y (447, n°. III), pour $\frac{R^2}{\text{cos. } z}$ sa valeur séc. z; elles deviendront,

I. $\text{tang. } (y+z)=\frac{R^2(\text{tang. } y+\text{tang. } z)}{R^2-\text{tang. } y \text{ tang. } z}$,

II. $\text{séc. } (y+z)=\frac{R \text{ séc. } y \text{ séc. } z}{R^2-\text{tang. } y \text{ tang. } z}$,

III. $\text{cot. } (y+z)=\frac{R^2-\text{tang. } y \text{ tang. } z}{\text{tang. } y+\text{tang. } z}$,

IV. $\text{coséc. } (y+z)=\frac{\text{séc. } y \text{ séc. } z}{\text{tang. } y+\text{tang. } z}$.

On trouvera semblablement ces quatre autres équations,

V. $\text{tang. } (y-z)=\frac{R^2(\text{tang. } y-\text{tang. } z)}{R^2+\text{tang. } y \text{ tang. } z}$,

VI. $\text{séc. } (y-z)=\frac{R \text{ séc. } y \text{ séc. } z}{R^2+\text{tang. } y \text{ tang. } z}$,

VII. $\text{cot. } (y-z)=\frac{R^2+\text{tang. } y \text{ tang. } z}{\text{tang. } y-\text{tang. } z}$,

VIII. $\text{coséc. } (y-z)=\frac{\text{séc. } y \text{ séc. } z}{\text{tang. } y-\text{tang. } z}$.

On voit, par ces équations, qu'ayant les tangentes des arcs y et z, et par conséquent aussi leurs sécantes, attendu que séc. $y=\sqrt{[R^2+(\text{tang. } y)^2]}$, séc. $z=\sqrt{[R^2+(\text{tang. } z)^2]}$; on aura les tangentes, sécantes, cotangentes, cosécantes de la somme et de la différence des mêmes arcs y et z.

453. *Corollaire IV.* Supposons comme dans l'article 451, $y=z$; les équations I, II, III, IV de l'article précédent deviendront,

I. $\text{tang. } 2y=\frac{2R^2 \text{. tang. } y}{R^2-(\text{tang. } y)^2}$,

II. séc. $2y = \frac{R\,(\text{séc. } y)^2}{R^2 - (\text{tang. } y)^2}$,

III. cot. $2y = \frac{R^2 - (\text{tang. } y)^2}{2\,\text{tang. } y}$,

IV. coséc. $2y = \frac{(\text{séc. } y)}{2\,\text{tang. } y}$.

La premiere de ces équations sert à trouver la tangente de l'angle double, lorsqu'on connoît la tangente de l'angle simple.

La seconde, à trouver la sécante de l'angle double, lorsqu'on connoît la tangente de l'angle simple y, et par conséquent aussi sa sécante, qui est $\sqrt{[R^2 + (\text{tang. } y)^2]}$.

La troisieme, à trouver la cotangente de l'angle double, lorsqu'on connoît la tangente de l'angle simple.

La quatrieme, à trouver la cosécante de l'angle double, lorsqu'on connoît la tangente de l'angle simple, et par conséquent aussi sa sécante.

454. *Corollaire V.* Si, connoissant la tangente d'un angle, on demandoit la tangente de sa moitié; ce problème pourroit se résoudre par l'équation I de l'article précédent. Car elle donne,

$[R^2 - (\text{tang. } y)^2]\,\text{tang. } 2y = 2R^2\,\text{tang. } y$;

ou, $(\text{tang. } y)^2 + \frac{2R^2\,\text{tang. } y}{\text{tang. } 2y} = R^2$;

d'où l'on tire,

$$\text{tang. } y = \frac{-R^2 \pm R\sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]}}{\text{tang. } 2y}.$$

La premiere valeur est la tangente de l'angle y, moitié de l'angle $2y$; la seconde est la tangente de l'angle $\frac{180^\circ - 2y}{2}$ ou $90^\circ - y$, moitié du supplément de l'angle $2y$; ce qui peut se démontrer ainsi directement.

Soient (Fig. 242) ANZ l'arc $2y$; AH sa tangente; CH sa sécante. Menez par le point Z la tangente ZV à la circonférence, et du point de rencontre V des lignes ZV, AH, menez au centre C la droite VC; prolongez HC, et par le

point G, où cette ligne va rencontrer la circonférence, menez la tangente GK, qui rencontre en K le prolongement de la tangente HA; enfin du point K menez au centre C la droite KC. Il est clair qu'on aura

$$CH = \sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]};$$
$$HZ = \sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]} - R;$$
$$HG = \sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]} + R.$$

D'où résultent (à cause des trois triangles rectangles semblables CAH, VZH, KGH),

$$ZV = \frac{R\sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]} - R^2}{\text{tang. } 2y},$$

$$GK = \frac{R\sqrt{[R^2 + (\text{tang. } 2y)^2]} + R^2}{\text{tang. } 2y}.$$

Or les deux arcs ZN, AN, sont égaux, puisque la droite VC, menée du point de concours V des deux tangentes ZV, AV, au centre C, partage l'angle ACZ en deux parties égales, ce qui donne AV = ZV; et de même les deux arcs GX, AX, sont égaux, puisque KC partage l'angle ACG en deux parties égales, ce qui donne AK = GK. Ainsi des deux lignes AV, AK, la première, qui est positive, exprime la tangente de l'arc AN, moitié de l'arc ANZ ($2y$); et la seconde, qui doit être prise négativement, exprime la tangente de l'arc AX, moitié de l'arc AXG lequel vaut $180° - 2y$.

455. *Corollaire VI.* Imaginons que des deux arcs y et z, l'un z devienne successivement y, $2y$, $3y$, $4y$, $5y$, etc.; en sorte qu'on ait,

$$y = y,$$
$$y + z = y + y = 2y,$$
$$y + z = y + 2y = 3y,$$
$$y + z = y + 3y = 4y,$$
$$y + z = y + 4y = 5y, \text{ etc.}$$

On aura, par l'équation I de l'article 449,

$$\sin. y = \sin. y,$$

$$\sin. 2y = \frac{2 \sin. y \cos. y}{R},$$

$$\sin. 3y = \frac{\sin. y \cos. 2y + \cos. y \sin. 2y}{R},$$

$$\sin. 4y = \frac{\sin. y \cos. 3y + \cos. y \sin. 3y}{R},$$

$$\sin. 5y = \frac{\sin. y \cos. 4y + \cos. y \sin. 4y}{R}, \text{ etc.}$$

Et par l'équation III du même article on aura

$$\cos. y = \cos. y,$$

$$\cos. 2y = \frac{(\cos. y)^2 - (\sin. y)^2}{R},$$

$$\cos. 3y = \frac{\cos. y \cos. 2y - \sin. y \sin. 2y}{R},$$

$$\cos. 4y = \frac{\cos. y \cos. 3y - \sin. y \sin. 3y}{R},$$

$$\cos. 5y = \frac{\cos. y \cos. 4y - \sin. y \sin. 4y}{R}, \text{ etc.}$$

D'où l'on voit que, connoissant le sinus du premier arc, et par conséquent aussi son cosinus, on connoîtra le sinus et le cosinus de l'arc double ; que, par le moyen des sinus et cosinus de l'arc simple et de l'arc double, on connoîtra les sinus et cosinus de l'arc triple ; que, par le moyen des sinus et cosinus de l'arc simple et de l'arc triple, on connoîtra les sinus et cosinus de l'arc quadruple ; ainsi de suite.

Les sinus et cosinus étant trouvés, on connoîtra les tangentes, sécantes, cotangentes, cosécantes. Ainsi, si l'on a une suite d'arcs qui forment une progression arithmétique croissante, dont la différence soit égale au premier arc, il suffira de connoître le sinus, et par conséquent aussi le cosinus de cet arc primitif, pour parvenir à connoître les sinus, cosinus, tangentes, sécantes, cotangentes, cosécantes, de tous les arcs dont il s'agit.

456. *Scholie général.* Tels sont les principes généraux qui servent à déterminer les sinus, cosinus, tangentes, etc. en parties du rayon. Il y a plusieurs manieres de procéder dans ces calculs et d'en dresser des tables. Contentons-nous d'indiquer l'un de ces moyens.

En partant d'un arc dont on connoît le sinus, par exemple, de l'arc de 30°, dont le sinus est égal à la moitié du rayon, on trouvera (451) le sinus de sa moitié 15° ; de même par

le moyen du sinus de 15°, on trouvera le sinus de sa moitié 7° 30′ ; par le moyen du sinus 7° 30′, on trouvera le sinus de sa moitié 3° 45′ ; ainsi de suite. En sorte qu'on aura les sinus de tous les arcs compris dans la progression géométrique décroissante $\div$ 30° : $\frac{30°}{2}$: $\frac{30°}{4}$: $\frac{30°}{8}$: $\frac{30°}{16}$: $\frac{30°}{32}$: etc.

Prenons dans cette progression un arc très petit, et, pour fixer les idées, supposons, par exemple, que ce petit arc soit 1″. Connoissant le sinus de cet arc, nous pourrons trouver (455) les sinus, cosinus, tangentes, etc. de tous les arcs compris dans la progression arithmétique croissante $\div$ 1″. 2″. 3″. 4″. 5″., etc. ; progression qu'on peut continuer jusqu'à 90°, où répond le plus grand de tous les sinus, qui est le rayon. Il est donc évident qu'on aura en parties du rayon les sinus, cosinus, tangentes, etc. de tous les arcs depuis 1″ jusqu'à 90°.

Supposons, par exemple, que le rayon soit représenté par le nombre 100000, le sinus de 23° 30′ sera représenté par 39875 ; sa tangente par 43481 ; sa sécante par 109044, etc.

Le rayon et les sinus, cosinus, tangentes, etc., étant ainsi exprimés par des nombres qui se rapportent à une même unité, nous pourrons déterminer les logarithmes de ces nombres par les principes que j'ai expliqués dans le volume précédent. Ainsi nous avons toutes les *données* nécessaires pour construire des tables qui contiennent les sinus, cosinus, tangentes, etc. avec les logarithmes qui leur correspondent. Il y a des moyens d'abréger considérablement dans la pratique les calculs de ces tables : mais nous n'expliquerons pas ici ces abréviations ; il nous suffit qu'on voie la possibilité de construire les tables dont il s'agit.

Les premiers mathématiciens qui entreprirent de calculer ces sortes de tables supposerent que le rayon étoit représenté par 10000000000, c'est-à-dire par l'unité suivie de 10 zéros. En conséquence le logarithme du rayon avoit 10 pour caractéristique ; mais dans la suite on a supprimé quelques zéros de la valeur du rayon, et on a néanmoins conservé toujours la même caractéristique à son logarithme. Par exemple, dans

les tables que Bouguer a données dans son *Traité de Navigation*, le rayon est simplement exprimé par 100000, et on lui attribue un logarithme qui a 10 pour caractéristique. Mais cela n'a aucun inconvénient, parceque les caractéristiques des logarithmes de tous les sinus, cosinus, tangentes, etc. y sont relatives à la caractéristique du logarithme du rayon ou sinus total.

Dans la plupart des tables on ne trouve pas les sécantes et les cosécantes, ni leurs logarithmes. En effet ces lignes sont inutiles pour la résolution complete des triangles; et nous allons la donner dans tous les cas qui peuvent se présenter, sans faire usage des sécantes et des cosécantes.

CHAPITRE III.

De la résolution des triangles rectilignes.

457. La résolution trigonométrique des triangles consiste à trouver, comme nous l'avons déja dit, parmi les six choses, trois côtés et trois angles, qui composent un triangle, trois de ces choses, lorsque l'on connoît les trois autres; d'où il faut néanmoins exclure, comme nous l'avons déja dit (421), le cas où l'on connoîtroit seulement les trois angles, qui demeure indéterminé, tous les triangles semblables d'une même espece satisfaisant à la même condition. Or, au moyen des tables trigonométriques, on connoît les angles, par les valeurs de leurs sinus, cosinus, tangentes, etc.; il s'agit donc d'abord d'établir en général les propositions qui font connoître les relations entre les côtés d'un triangle, et les sinus, cosinus, tangentes, etc. de ses angles : ensuite nous ferons l'application de ces principes à tous les cas des triangles rectilignes.

458. Théorême I. *Dans tout triangle rectangle* ABC (Fig. 243), *l'hypoténuse* AC, *est à l'un des côtés* AB,

comme le rayon est au sinus de l'angle C *opposé au côté* AB.

Car, en supposant que CF représente le rayon, et abaissant la perpendiculaire FE sur CB prolongé, les triangles rectangles semblables ABC, FEC donnent AC : AB :: FC (R) : FE (sin. C).

459. Théorême II. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *un côté* CB *est à l'autre côté* AB, *comme le rayon est à la tangente de l'angle opposé au second côté.*

Car soit CF ou CH le rayon, HK la tangente de l'arc HF, ou de l'angle C dont cet arc est la mesure : les triangles rectangles semblables CBA, CHK donnent CB : BA :: CH (R) : HK (tang. C).

460. Théorême III. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (Fig. 244), *les sinus de deux angles sont entre eux, comme les côtés opposés à ces angles; c'est-à-dire qu'on a, par exemple, sin.* C : *sin.* B :: AB : AC.

Qu'on prenne sur les côtés BA, CA, les parties égales BF, CH, pour représenter le rayon, et qu'on abaisse sur le troisieme côté BC les perpendiculaires FE, HK, qui seront les sinus des angles B et C; qu'on mene de plus AD perpendiculaire sur BC. Les triangles rectangles semblables BEF, BDA, et les deux triangles rectangles semblables CKH, CDA, donnent ces deux proportions :

$$\text{FB (R)} : \text{AB} :: \text{FE (sin. B)} : \text{AD} = \frac{\text{AB} \times \text{sin. B}}{\text{R}},$$

$$\text{HC (R)} : \text{AC} :: \text{HK (sin. C)} : \text{AD} = \frac{\text{AC} \times \text{sin. C}}{\text{R}}.$$

Egalant entre elles les deux valeurs de AD, et supprimant le dénominateur commun R, on aura AB × sin. B = AC × sin. C; d'où résulte, sin. C : sin. B :: AB : AC.

461. Théorême IV. *Dans tout triangle rectiligne* ABC (Fig. 245), *la somme de deux côtés* BC, BA, *est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des deux angles* A *et* C, *opposés à ces côtés, est à la tangente*

de la moitié de la différence des mêmes angles ; c'est-à-dire qu'en nommant, pour abréger, *2p la somme des deux angles* A *et* C, *2q leur différence, on a la proportion :*

$$BC+BA : BC-BA :: \text{tang. } p : \text{tang. } q.$$

En effet, ayant par hypothese, $A+C=2p$, $A-C=2q$, on trouve, par addition et soustraction, $A=p+q$, $C=p-q$. Donc (449), $\text{sin. } A = \text{sin. } (p+q) = \frac{\text{sin. } p. \text{ cos. } q + \text{cos. } p. \text{ sin. } q}{R}$, $\text{sin. } C = (\text{sin. } p-q) = \frac{\text{sin. } p. \text{ cos. } q - \text{cos. } p. \text{ sin. } q}{R}$.

D'un autre côté, on a par l'article précédent, BC : BA :: sin. A : sin. C; ce qui donne par la théorie des proportions,

$$BC+BA : BC-BA :: \text{sin. } A + \text{sin. } B : \text{sin. } A - \text{sin. } C.$$

Substituant dans les deux derniers termes de cette proportion, à la place de sin. A et sin. C, leurs valeurs, et effaçant ce qui se détruit, on trouvera

$$BC+BA : BC-BA :: \frac{R \times \text{sin. } p}{\text{cos. } p} : \frac{R \times \text{sin. } q}{\text{cos. } q}.$$

Mais (447, n°. 11) $\frac{R \times \text{sin. } p}{\text{cos. } p} = \text{tang. } p$, et $\frac{R \times \text{sin. } q}{\text{cos. } q} = \text{tang. } q$. Donc enfin

$$BC+BA : BC-BA :: \text{tang. } p : \text{tang. } q :: \text{tang. } \frac{A+C}{2} : \text{tang. } \frac{A-C}{2}.$$

462. *Corollaire.* Donc, si, dans le triangle ABC, on connoît les côtés BC, BA, et l'angle compris B, on pourra déterminer les angles A et C. Car, en retranchant l'angle B de 180 degrés, valeur de la somme des trois angles du triangle, on aura A + C, et par conséquent aussi $\frac{A+C}{2}$; ce qui donne par les tables, tang. $\frac{A+C}{2}$. Ainsi, dans la proportion précédente, les trois premiers termes seront connus; on aura donc aussi le quatrieme, c'est-à-dire tang. $\frac{A-C}{2}$; ce qui

donne par les tables, $\frac{A-C}{2}$. Or, $A=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}$, et $C=\frac{A+C}{2}-\frac{(A-C)}{2}$. Donc on connoîtra séparément les angles A et C.

463. Théorème V. *Dans tout triangle rectiligne, on a cette proportion : le produit de deux côtés est à la racine quarrée d'un produit de quatre dimensions, résultant de la multiplication de la demi-somme des trois côtés par les trois excès de cette demi-somme sur chacun des côtés, comme le double du rayon, est au sinus de l'angle compris entre les deux côtés dont le produit compose le premier terme de la proportion.*

D'un angle A du triangle ACB (Fig. 246 ou 247), abaissez la perpendiculaire AO sur le côté opposé BC, ou sur son prolongement. Le triangle rectangle AOC donnera (451), AC : AO :: R : sin. ACO; et par conséquent sin. ACO ou sin. $ACB=\frac{AO\times R}{AC}$. Or (189), la valeur de la perpendiculaire AO est dans l'une et l'autre Figure,

$$\frac{\sqrt{[(AB+CB+AC).(AB+CB-AC).(AB+AC-CB).(CB+AC-AB)]}}{2CB};$$

expression qui devient (en faisant, pour abréger, $AB+BC+AC=2S$, et observant que $AB+BC-AC=2S-2AC$, $AB+AC-BC=2S-2BC$, $BC+AC-AB=2S-2AB$),

$$\frac{2\sqrt{[S.(S-AC).(S-BC).(S-AB)]}}{CB}.$$

Substituons cette valeur de AO dans l'équation sin. $ACB=\frac{AO\times R}{AC}$, on aura sin. $ACB=\frac{2R\times\sqrt{[S.(S-AC).(S-BC).(S-AB)]}}{CB\times AC}$; d'où l'on tire la proportion qui forme l'énoncé du théorème.

464. *Remarque.* Comme un angle aigu et son supplément ont le même sinus, on peut être incertain si l'expression qu'on vient de trouver est celle du sinus de l'angle aigu ACB (Fig. 246), ou de l'angle obtus ACB (Fig. 247). Mais on se tirera de cette incertitude en observant que si un triangle est

dans le cas d'avoir un angle obtus, cet angle est nécessairement (73) celui qui est opposé au plus grand côté, et que les deux autres angles seront aigus (70). De là résulte cette regle. *Cherchez, par la formule précédente, les sinus des deux angles opposés aux deux plus petits côtés du triangle; ces deux angles sont aigus. Retranchez leur somme de* 180°: *le reste sera l'angle opposé au plus grand côté, et cet angle sera aigu ou obtus, selon que le reste de la soustraction sera plus petit ou plus grand que* 90 *degrés.*

465. *Scholie général.* D'après ces principes, nous allons présenter, dans un tableau succinct, la résolution des triangles rectilignes pour tous les cas possibles. La chose inconnue est toujours l'un des termes d'une proportion dont les trois autres sont connus; et par conséquent on la connoîtra également par la nature des proportions.

Tab. I. *Résolution des triangles rectangles* (Fig. 243).

CAS	DONNÉES	TROUVER	SOLUTION.
1	L'hypoténuse AC et les angles	Un côté AB	R : sin. C :: AC : AB (458).
2	L'hypoténuse AC et un côté AB	Les angles	AC : AB :: R : sin. C ; A = 90° — C.
3	L'hypoténuse AC et un côté AB	L'autre côté BC	Cherchez les angles par le second cas ; et ensuite le côté BC par le premier.
4	Les angles et un côté AB	L'hypoténuse AC	Sin C : R :: AB : AC.
5	Les angles et un côté BC	L'autre côté AB	R : tang. C :: BC : AB (459).
6	Les deux côtés AB et BC	Les angles	AB : BC :: R : tang. A ; C = 90° — A.
7	Les deux côtés AB et BC	L'hypoténuse AC	Cherchez les angles par le sixieme cas, et ensuite l'hypoténuse par le quatrieme.

Tab. II. *Résol. des triangles obliquangles* (Fig. 245).

CAS	DONNÉES	TROUVER	SOLUTION.
1	Les angles C et B, et un côté AB	Chacun des autres côtés AC, BC	Sin. C : sin. B :: AB : AC (460); $A = 180° - B - C$. sin. C : sin. A :: AB : BC.
2	Les deux côtés AB, AC, et l'angle B opposé à l'un d'eux	Les angles C et A	AC : AB :: sin. B : sin. C; $A = 180° - B - C$.
3	Les deux côtés AB, AC, et l'angle B opposé à AC	L'autre côté BC	Cherchez d'abord les angles (cas précédent); et alors vous aurez, sin. C : sin. A :: AB : BC.
4	Les deux côtés BC, BA, et l'angle compris B	Les angles A et C	$BC + BA : BC - BA :: \text{tang.} \frac{A+C}{2} : \text{tang.} \frac{A-C}{2}$, (461). On connoîtra donc (462) C et B.
5	Les deux côtés BC BA, et l'angle compris B	L'autre côté AC	Cherchez les angles par le cas précédent; et ensuite cherchez AC par le premier cas.
6	Les trois côtés	Les angles	Cherchez les angles par l'article 463.

466. *Remarque I.* Le 2e et le 3e cas des triangles obliquangles ont deux solutions, quand le côté AC opposé à l'angle donné B est moindre que l'autre côté donné AB (Fig. 248); car si, du point A pour centre, on décrit l'arc CxC', et qu'on tire AC' on verra que l'angle ACB ou son égal $AC'C$ et le supplément $AC'B$ de ce dernier, ayant le même sinus, les *données* sont les mêmes dans les deux triangles ABC, ABC', et que par conséquent ces deux triangles satisfont également l'un et l'autre aux conditions du problème. Mais lorsque l'angle connu est opposé au plus grand des deux côtés donnés, il n'y a point d'indétermination, et le problème n'a qu'une seule solution; car que l'angle donné soit obtus, droit, ou aigu, l'angle opposé au second côté connu, qui est supposé le plus petit, est nécessairement aigu; par où l'on voit que les especes des trois angles du triangle sont connues, et qu'ainsi on a tout ce qui est nécessaire pour déterminer immédiatement le seul triangle qui doit alors satisfaire aux conditions de la question.

467. *Remarque II.* Les cas 4 et 6 peuvent être résolus par les propriétés des triangles rectangles. Car, 1°. si vous connoissez les côtés BC, BA et l'angle compris B (Fig. 246 et 247), vous aurez, en abaissant la perpendiculaire AO sur BC, un triangle rectangle BOA, dans lequel vous connoissez l'hypoténuse BA, l'angle aigu B, et par conséquent aussi l'autre angle aigu BAO. Ainsi, vous déterminerez BO et AO (458). Retranchant BO de BC, ou BC de BO, vous aurez un triangle rectangle COA, dans lequel vous connoîtrez les côtés CO, AO, contigus à l'angle droit O, et par conséquent vous déterminerez l'angle C (459); ensuite l'hypoténuse AC (458).

2°. Si vous connoissez les trois côtés du triangle BAC, vous connoîtrez les segments BO, OC, déterminés par la perpendiculaire AO, par l'article 225; et vous aurez tout ce qui est nécessaire pour résoudre les deux triangles rectangles BOA, BOC; ce qui vous donnera les angles du triangle proposé.

Quoique ces nouveaux moyens de résoudre les deux cas

proposés soient très faciles, les calculs qu'ils exigent dans la pratique sont plus longs que ceux des moyens indiqués dans la table précédente, lesquels méritent par conséquent la préférence.

468. *Scholie.* Les préceptes généraux que renferment les deux tables précédentes, s'appliquent facilement à tous les problêmes particuliers qui se présentent dans la pratique. Mais, pour abréger les calculs numériques autant qu'il est possible, au lieu d'opérer immédiatement sur les nombres qui expriment les côtés d'un triangle, et les sinus, cosinus, tangentes, etc. de ses angles, on emploie les logarithmes de ces nombres; ce qui change les multiplications et les divisions, en simples additions et soustractions.

Application de la théorie précédente à quelques problêmes de pratique.

469. Problême I. *Trouver* (Fig. 249) *la hauteur* AB *d'une tour.*

Je mesure sur le terrain, supposé horizontal, à partir du pied M de la tour, une distance arbitraire MN. Au point N je place un graphometre soutenu par son pied ON, et ayant dirigé le plan de cet instrument par l'axe de la tour, je mets le diametre fixe GE dans une position horizontale au moyen d'un fil à plomb, qui doit pour cela répondre au point 90° du limbe de l'instrument. Ensuite je fais tourner le diametre ou la regle mobile jusqu'à ce qu'on puisse appercevoir, à travers les pinnules ou la lunette dont cette regle est garnie, le sommet B de la tour. J'observe sur le limbe le nombre de degrés de l'arc GF qui mesure l'angle GOF, ou son opposé au sommet BOA. Par-là j'ai un triangle rectangle BAO, dans lequel je connois, outre l'angle droit A, le côté AO, qui est égal à la ligne mesurée MN, et l'angle AOB; et je détermine AB par cette proportion, R : tang. O :: AO : AB $= \frac{AO \times \text{tang. } O}{R}$. Connoissant AB, si on lui

ajoute la hauteur ON ou AM de l'instrument, on aura la hauteur entiere MB de la tour.

En opérant par logarithmes, l'équation $AB = \frac{AO \times \text{tang. } O}{R}$, donnera log. AB = log. AO + log. tang. O — log. R.

Supposons, par exemple, MN ou AO = 64 toises, l'angle AOB = 38° 51′ : on aura,

log. 64	=	1,8061800
log. tang. 38° 51′ . . .	=	9,9060431
somme . .	=	11,7122231
log. R	=	10,0000000
Reste . . .	=	1,7122231

Le nombre correspondant au logarithme qui forme ce reste est 51 to. 3pi. 3po., à-peu-près ; ce qui est la hauteur de la tour.

4-o. Problème II. *Déterminer* (Fig. 250) *la hauteur* MB *d'une tour, ou de tout autre objet dont le pied est inaccessible.*

Mesurez dans la plaine une base horizontale DE des extrémités de laquelle vous puissiez appercevoir le sommet B de l'objet proposé ; et, à l'aide du graphometre, dont le plan se dirige dans toutes les situations possibles, et dont je suppose que HD ou CE représente la hauteur, déterminez les angles CHB, HCB, que la droite HC, parallele et égale à la base DE, fait avec les rayons visuels HB, CB ; déterminez de plus l'angle BHA, que fait le rayon visuel HB avec l'horizontale HA. Cela posé, dans le triangle BHC on connoît le côté HC, et les deux angles H et C, et conséquemment aussi l'angle B. Donc on aura HB par cette proportion,

$$\text{sin. } B : \text{sin. } C :: HC : HB = \frac{HC \times \text{sin. } C}{\text{sin. } B}.$$

Dans le triangle BHA, rectangle en A, on connoît, outre l'angle droit A, l'angle H, et l'hypoténuse HB. Ainsi on aura la hauteur AB par cette proportion,

$$R : \sin. H :: HB : AB = \frac{HB \times \sin. H}{R}.$$

Ajoutant à AB la hauteur HD ou AM de l'instrument, on aura la hauteur entiere MB de l'objet proposé.

471. Problême III. *Déterminer la distance qu'il y a entre deux objets* A *et* B (Fig. 251), *visibles et inaccessibles.*

Mesurez sur le terrain une base MN, des extrémités de laquelle vous puissiez appercevoir les deux objets A et B, et marquez les extrémités de cette ligne par deux piquets M et N. A l'aide du graphometre mesurez les angles AMN, ANM, BMN, BNM, que la base MN fait avec les rayons visuels MA, NA, MB, NB. Mesurez de plus l'angle AMB. Cela posé, dans le triangle AMN, on connoît le côté MN et deux angles. Donc on pourra calculer AM (460). De même, dans le triangle BMN, on connoît le côté MN et les deux angles M et N ; et conséquemment on pourra déterminer MB. Maintenant on aura un triangle AMB, dans lequel on connoit les côtés MA, MB, et l'angle compris AMB. Donc on pourra déterminer AB (462 et 460).

472. *Corollaire* Par le moyen de ce problême, on peut mener un parallele à la droite AB ; car, puisqu'on est parvenu à connoître l'angle MAB, si par le point M l'on tire la droite OMS, qui fasse avec MA un angle AMO égal à l'angle MAB, cette droite sera parallele à AB (65).

473. Problême IV. *Deux points* A *et* B (Fig. 252), *visibles ou non visibles l'un de l'autre, étant donnés sur le terrain, trouver un point quelconque* C, *qui soit dans l'alignement des deux premiers, c'est-à-dire, qui soit placé sur la droite* AB.

Calculez le triangle MAB, comme dans le problême précédent ; et supposant que le point cherché C doive être placé dans la direction MC, mesurez l'angle AMC. On aura par-là un triangle MAC, dans lequel on connoît le côté MA, qui a été calculé, les deux angles A et M, et

conséquemment aussi l'angle C. Donc on pourra calculer MC (460). Portant donc dans la direction MC la longueur qu'on aura trouvée pour MC, le point C sera placé dans l'alignement AB.

474. *Remarque.* Si on ne pouvoit pas aller directement de M en C, on mesureroit une base MN de l'extrémité N de laquelle on pût aller en C; de plus on mesureroit l'angle CMN. Alors on auroit un triangle CMN, dans lequel on connoît le côté MC calculé, le côté MN mesuré, et l'angle CMN mesuré. Donc on pourroit déterminer (462 et 460) le côté NC et l'angle MNC. Ainsi, menant une droite NC, qui fît avec NM un angle égal à l'angle calculé MNC, et portant sur cette ligne NC la longueur qu'on auroit trouvée pour NC, le point C seroit placé nécessairement sur la droite AB.

Ce problème peut servir à déterminer des points qui soient placés sur les prolongements des faces d'une *courtine*, d'un *bastion*, etc.

475. Problème V. *Connoissant les distances d'un point où l'on est, aux extrémités d'une ligne donnée, telle que la façade d'un bâtiment, déterminer l'angle sous lequel on voit cette ligne.*

La ligne donnée et les deux distances du spectateur à ses extrémités, forment un triangle dans lequel on est supposé connoître les trois côtés; et par conséquent on pourra déterminer l'angle demandé, par le sixieme cas de la table II, de l'article 465.

476. Problème VI. *Les trois côtés* AB, AC, BC (Fig. 253), *du triangle donné* ABC, *étant vus d'un point* D, *sous les angles connus* ADB, ADC, BDC, *trouver la position du point* D, *c'est-à-dire, les angles et les côtés du triangle* ADC.

Imaginons qu'au triangle DAB soit circonscrit un cercle, et qu'au triangle DBC soit circonscrit un autre cercle qui coupe le premier au point cherché D. Soient menés les

diametres BO, BM, et les cordes AO, CM. Cela posé, l'angle AOB étant égal à l'angle donné ADB (103), et de même l'angle BMC étant égal à l'angle donné BDC; dans le triangle rectangle BAO, on connoît, outre l'angle droit A, le côté BA, l'angle BOA, et conséquemment aussi l'angle OBA; pareillement, dans le triangle rectangle BCM, on connoît, outre l'angle droit C, le côté BC, l'angle BMC, et conséquemment aussi l'angle CBM. Donc on pourra déterminer (458 et 459) les diametres BO, BM, et par conséquent aussi les rayons BK, BH.

En retranchant de l'angle connu ABC les deux angles connus ABO, CBM, restera l'angle connu OBM. Joignez les centres K et H par la droite KH, qui sera évidemment perpendiculaire à la corde BD, puisque chacun des deux points K et H est également éloigné des points B et D. Dans le triangle BKH on connoîtra les côtés BK, BH, et l'angle KBH qu'ils comprennent. Donc on pourra déterminer (462) les angles K et H.

L'angle K étant connu, on connoîtra aussi son complément KBP. Ajoutant à ce dernier angle l'angle connu ABO, on aura l'angle connu ABD. Donc, dans le triangle ABD, on connoît le côté AB et les deux angles D et B, et par conséquent aussi le troisieme angle A. Ainsi on pourra déterminer AD (460). On déterminera semblablement DC. La position du point D est donc fixée, puisqu'on connoît les trois côtés du triangle ADC, et qu'on a le moyen de déterminer ses angles (463).

477. *Remarque I.* Si on vouloit se contenter de résoudre ce problême par une simple opération graphique, voici à quoi se réduit cette opération. Elevez par le point A une perpendiculaire AO à la droite BA; par le point B menez la droite BO, qui fasse avec BA un angle égal au complément de l'angle donné ADB; divisez BO en deux parties égales au point K; de ce point comme centre, avec le rayon KB, décrivez un cercle. De même élevez CM perpendiculaire à BC; faites l'angle CBM égal au complément de l'angle donné BDC; divisez BM en deu

parties égales au point H; et de ce point comme centre, avec le rayon HB, décrivez un second cercle. Le point D, où les circonférences des deux cercles se couperont, sera le point demandé.

478. *Remarque II.* Il y a un cas où le problème précédent est indéterminé; c'est celui où les quatre points A, B, C, D (Fig. 254), sont placés sur une même circonférence de cercle; car tous les points D, placés sur l'arc ADC, satisfont également aux conditions du problème, qui est par conséquent alors susceptible d'une infinité de solutions.

Le caractere auquel on connoîtra que les quatre points A, B, C, D, sont placés sur une même circonférence, ou que le point D est placé sur la circonférence de cercle qui passe par les trois points A, B, C, est l'égalité de l'angle ADB avec l'angle BCA, ou de l'angle BDC avec l'angle BAC. Si cette égalité n'a pas lieu, le point D sera placé hors de la circonférence dont on vient de parler, et le problème n'aura qu'une seule solution.

SECTION II.

De la trigonométrie sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires.

479. Un triangle sphérique est, comme on l'a déja dit (395), l'espace compris sur la surface d'une sphere donnée, entre les arcs de trois grands cercles, qui se coupent. Et il faut se rappeler que la mesure de chaque angle est la même

que celle de l'angle formé par les plans des deux grands cercles entre lesquels cet angle est compris, ou que celle de l'angle rectiligne formé par deux perpendiculaires menées dans ces plans à un même point de leur section commune.

480. La trigonométrie sphérique a pour objet la résolution de ces triangles, c'est-à-dire la détermination de trois des six choses (trois côtés et trois angles) qui composent un triangle sphérique, lorsque les trois autres sont données : problème général de même nature que celui de la résolution des triangles rectilignes, et sur lequel nous ferons d'abord une remarque pour le cas où les trois choses données sont les trois angles du triangle, comme nous avons fait dans la même hypothese, par rapport aux triangles rectilignes.

481. Dans ces derniers triangles, lorsque l'on connoît seulement les trois angles, on ne peut déterminer (421) que les rapports des côtés, et non pas leurs grandeurs absolues ; mais, d'après ces mêmes rapports, si l'on se donne l'un des côtés, on connoîtra aussi les grandeurs absolues des deux autres, c'est-à-dire les valeurs de ces côtés, exprimées en unités de même espece que celles du côté donné : dans un triangle sphérique, la connoissance des trois angles suffit pour déterminer les trois côtés, c'est-à-dire les nombres de degrés de ces côtés, comme on le verra ci-dessous ; ensuite, étant donné le rayon de la sphere, sur la surface de laquelle est tracé le triangle, on connoîtra les grandeurs absolues de ses côtés (139), puisqu'ayant le rayon du cercle et le nombre de degrés de l'arc, on a la longueur de l'arc.

482. Toutes les notions qu'on a données dans la section précédente sur la nature des angles, sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, etc. s'appliquent également à la trigonométrie sphérique. Je suppose donc qu'on se les rappelle ; et je me borne à ajouter ici quelques nouvelles explications, spécialement relatives à la résolution des triangles sphériques.

483. On entend par les *poles* d'un grand cercle de la

sphere les extrémités du diametre perpendiculaire au plan de ce cercle. D'où l'on voit que chaque pole est distant de 90 degrés, de tous les points de la circonférence du cercle auquel il se rapporte.

484 *Corollaire I.* Lorsque les poles de deux grands cercles sont éloignés l'un de l'autre de 90 degrés, ces cercles sont perpendiculaires entre eux, puisque l'un passe par une ligne perpendiculaire à l'autre. Et réciproquement quand deux grands cercles sont perpendiculaires entre eux, l'un passe par les poles de l'autre.

485. *Corollaire II.* Si de l'angle A (Fig. 255) d'un triangle sphérique ABC, comme pole, on décrit un arc EF de grand cercle entre les côtés AB, AC, prolongés s'il est nécessaire, cet arc EF sera la mesure de l'angle A; car si des points E et F, on mene au centre O de la sphere, les rayons EO, FO, il seront évidemment perpendiculaires à la section commune AO des deux cercles auxquels les arcs AB, AC appartiennent; et par conséquent l'arc EF, qui est la mesure de l'angle rectiligne EOF, sera aussi la mesure (314) de l'angle plan formé par les deux cercles, ou de l'angle sphérique A.

486. *Corollaire III.* Si des points B et D (Fig. 256) distants l'un de l'autre de 90 degrés, comme poles, on décrit deux arcs DF, BF, qui se coupent en F, à angles droits; qu'ensuite, par les deux mêmes points B et D, on fasse passer les arcs BE, DA, qui se coupent en C: on aura deux triangles sphériques BAC, DEC, dans lesquels les arcs BC, CE sont compléments l'un de l'autre, les arcs AC, CD sont compléments l'un de l'autre, et les angles B et D sont compléments des côtés DE, BA, ces angles ayant pour mesures les arcs EF, AF.

J'appellerai l'un des triangles BAC, DEC, *triangle complémental*, par rapport à l'autre.

AVERTISSEMENT GÉNÉRAL.

Comme dans ces matieres on ne sauroit trop simplifier le discours et les symboles, je désignerai (lorsque, cela pourra se faire sans obscurité et sans équivoque), un angle sphérique par la lettre écrite à son sommet; je désignerai aussi chaque côté par une simple lettre écrite vers son milieu, comme on le voit (Fig. 257 et 258). Lorsqu'il s'agira de triangles rectangles, on se souviendra que des trois lettres employées à désigner le triangle, celle qui répond à l'angle droit (comme angle *unique* ou comme angle *principal*) occupe le milieu dans l'ordre d'énonciation, et que le côté opposé à l'angle droit s'appelle *hypoténuse*.

CHAPITRE II.

Résolution des triangles sphériques.

487. Théorême I. DANS *tout triangle rectangle sphérique* BAC (Fig. 257), *le rayon est au sinus de l'angle* C, *comme le sinus de l'hypoténuse* BC, *est au sinus du côté* AB *opposé à l'angle* C; *c'est-à-dire qu'on a la proportion*, R : sin. C :: sin. *b* : sin. *a*.

Soit O le centre de la sphere. Du point C, comme pole, décrivez l'arc de grand cercle FE, entre les côtés CA, CB, prolongés; et menez les rayons OC, OA, OB, OF, OE. Les deux rayons EO, FO, sont perpendiculaires l'un et l'autre au même point O du rayon OC, et par conséquent l'arc EF est la mesure de l'angle sphérique C. Menez les sinus EH, BI des arcs EF, BA; ces sinus sont perpendiculaires au même plan OFC; et si par BI on fait passer un plan perpendiculaire à OC, les intersections BK, KI de ce plan avec les plans OEC, OFC, seront paralleles respectivement aux

rayons OE, OF. D'où il suit que les deux triangles rectangles OHE, KIB seront semblables, et donneront, OE : EH :: BK : KI; ce qui est la proportion du théorême.

488. *Corollaire.* Dans un triangle sphérique quelconque BAC (Fig. 258), les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés. Car si de l'un C des angles on mene l'arc CD perpendiculaire sur le côté opposé BA, ou sur son prolongement, les deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC, donneront, R : sin. A :: sin. c : sin. $d = \frac{\text{sin. A. sin. } c}{\text{R}}$; et R : sin. B :: sin. b : sin. $d = \frac{\text{sin. B. sin. } b}{\text{R}}$. Egalant entre elles ces deux valeurs de sin. d, et supprimant le dénominateur commun R, on aura sin. A sin. c = sin. B sin. b; d'où l'on tire, sin. A : sin. B :: sin. b : sin. c.

489. Théorême II. *Dans tout triangle rectangle sphérique* BAC (Fig. 257), *le rayon est au cosinus d'un angle* C, *comme la tangente de l'hypoténuse* BC, *est à la tangente du côté* AC *adjacent à l'angle* C; *c'est-à-dire qu'on a la proportion*, R : cos. C :: tang. b : tang. c.

Faites d'abord la même construction que pour le théorême précédent; puis menez les tangentes CL, CM des arcs CA, CB, lesquelles seront respectivement parallèles aux rayons OF, OE; par ces tangentes faites passer le plan CML; il coupera le plan OBA prolongé, suivant la droite ML perpendiculaire au plan OCF, ou parallele au sinus EH. Ainsi les deux triangles rectangles OHE, CLM, seront semblables, et donneront, OE : OH :: CM : CL; ce qui est la proportion du théorême.

490. *Corollaire.* Dans deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC (Fig. 258), qui ont un côté commun CD, les cosinus des angles ACD, BCD adjacents à ce côté, sont entre eux en raison inverse des tangentes des hypoténuses. Car R : cos. ACD :: tang. AC : tang. CD = $\frac{\text{cos. ACD. tang. AC}}{\text{R}}$, et R;

cos. BCD :: tang. BC : tang. CD $= \frac{\text{cos. BCD. tang. BC}}{R}$. Donc $\frac{\text{cos. ACD. tang AC}}{R} = \frac{\text{cos. BCD. tang. BC}}{R}$; ce qui donne cos. ACD : cos. BCD :: tang. BC : tang. AC.

491. Théorême III. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au cosinus d'un côté, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse.*

Soit le triangle sphérique rectangle BAC (Fig. 256) : du point B, comme pole, décrivez l'arc FED. Les deux arcs FED, ACD, étant l'un et l'autre perpendiculaires à l'arc BAF, se coupent en un point D, qui est distant de 90 degrés, des points B, A, F, et le triangle rectangle DEC est (486) le triangle complémental du triangle rectangle proposé BAC. Or, dans le triangle rectangle DEC, on a R : sin. D :: sin. DC : sin. EC ; mais l'angle D est le complément de BA ; DC est le complément de CA ; EC est le complément de BC ; donc R : cos. AB :: cos. AC : cos. CB.

492. *Corollaire.* Si deux triangles sphériques rectangles ADC, BDC (Fig. 258) ont le côté commun CD, les cosinus des bases AD, BD, seront entre eux comme les cosinus des hypoténuses AC, BC. Car on a, cos. AD : R :: cos. AC : cos. CD $= \frac{\text{R. cos. AC}}{\text{cos. AD}}$; et cos. BD : R :: cos. BC : cos. CD $= \frac{\text{R. cos. BC}}{\text{cos. BD}}$; donc $\frac{\text{R. cos. AC}}{\text{cos. AD}} = \frac{\text{R. cos. BC}}{\text{cos. BD}}$; ce qui donne cos. AD : cos. BD :: cos. AC : cos. BC.

493. Théorême IV. *Dans tout triangle rectangle sphérique* BAC (Fig. 256), *le rayon est au sinus de l'un* C *des angles* C *et* B, *comme le cosinus du côté* CA *adjacent à cet angle, est au cosinus de l'angle* B *opposé au côté* AC.

Car, en faisant la même construction que dans le théorême précédent, le triangle rectangle complémental DEC donne (487), R : sin. C :: sin. DC : sin. DE. Or, l'angle DCE est égal à son opposé au sommet BCA ; DC est le complém de CA ; DE est le complément de EF mesure de l'angl

Donc, en rapportant la proportion au triangle rectangle proposé BAC, on a R : sin. C :: cos. AC : cos. B.

494. *Corollaire.* Dans les deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC (Fig. 258), qui ont le côté commun DC, les sinus des angles ACD, BCD, sont entre eux, comme les cosinus des angles A et B. Car sin. ACD : R :: cos. A : cos. CD $= \frac{\text{R. cos. A}}{\text{sin. ACD}}$; et sin. BCD : R :: cos. B : cos. CD $= \frac{\text{R. cos. B}}{\text{sin. BCD}}$. Donc $\frac{\text{R. cos. A}}{\text{sin. ACD}} = \frac{\text{R. cos. B}}{\text{sin. BCD}}$; ce qui donne sin. ACD : sin. BCD :: cos. A : cos. B.

495. Théorème V. *Dans tout triangle sphérique rectangle* BAC (Fig. 256), *le rayon est au sinus de l'un* AB *des côtés, comme la tangente de l'angle* B, *adjacente à ce côté, est à la tangente du côté* CA *opposé à l'angle* B.

Car le triangle rectangle complémental DEC donne (489), R : cos. D :: tang. DC : tang. DE. Donc, en rapportant cette proportion au triangle proposé BAC, on aura R : sin. AB :: cotang. AC : cotang. B. Mais cotang. AC : cotang. B :: tang. B : tang. AC (448). Donc R : sin. AB :: tang. B : tang. AC.

496. *Corollaire.* Dans deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC (Fig. 258), qui ont un côté commun CD, les sinus des bases AD, BD, sont entre eux en raison inverse des tangentes des angles A et B. Car R : sin. AD :: tang. A : tang. CD $= \frac{\text{sin. AD. tang. A}}{\text{R}}$; et R : sin. BD :: tang. B : tang. CD $= \frac{\text{sin. BD. tang. B}}{\text{R}}$. Donc $\frac{\text{sin. AD. tang. A}}{\text{R}} = \frac{\text{sin. BD. tang. B}}{\text{R}}$; ce qui donne sin. AD : sin. BD :: tang. B : tang. A.

497. Théorème VI. *Dans tout triangle rectangle sphérique* BAC (Fig. 256), *le rayon est au cosinus de l'hypoténuse, comme la tangente de l'un des angles* C *ou* B *est à la cotangente de l'autre.*

En regardant d'abord le triangle complémental DEC, comme le triangle principal, on a (495), R : sin. CE :: tang. DCE : tang. DE : proportion qui étant ensuite rapportée au triangle proposé BAC, se convertit en celle-ci, R : cos. BC :: tang. C : cotang. B.

498. Lemme. *Si l'on représente par* A *et* B *deux arcs inégaux, on aura ces proportions :*

I. Sin. A + sin. B : 2 sin. $\frac{A+B}{2}$ :: cos. $\frac{A-B}{2}$: R,

II. Cos. A + cos. B : 2 cos. $\frac{A+B}{2}$ :: cos. $\frac{A-B}{2}$: R,

III. Sin. A — sin. B : 2 sin. $\frac{A-B}{2}$ :: cos. $\frac{A+B}{2}$: R,

IV. Cos. B — cos. A : 2 sin. $\frac{A-B}{2}$ :: sin. $\frac{A+B}{2}$: R,

V. Sin. A + sin. B : sin. A — sin. B :: tang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$,

VI. Cos. A + cos. B : cos. B — cos. A :: cot. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$.

Soient (Fig. 259), ACLEA le quart de cercle décrit du centre C ; AB et AD les deux arcs proposés ; partagez leur différence DEB en deux parties égales au point E, par le rayon CE qui sera perpendiculaire à la corde BD ; prolongez de part et d'autre cette corde jusqu'à la rencontre des rayons CA, CL prolongés ; menez, par le point E, la tangente KEI, qui rencontre en I et K les prolongements des mêmes rayons ; tirez des points B, E, F, D, les perpendiculaires BN, EH, FG, DO, sur le rayon CA ; et des points F, D, les paralleles FR, DP au même rayon ; enfin, prolongez le rayon CB jusqu'à la rencontre de la tangente KI.

L'arc EB étant la demi-différence des deux arcs AB, AD, c'est-à-dire, de A et B, on a $EB = \frac{A-B}{2}$. D'un autre côté, à cause de EB = ED ; les trois arcs ADB, ADE, AD, forment une proportion arithmétique continue ; donc $ADE = \frac{A+B}{2}$. Semblablement, à cause de BF = FD,

les droites BN, FG, DO, forment une proportion arithmétique continue, et les droites CN, CG, CO forment une proportion arithmétique continue ; donc $2FG = BN + DO = \sin. A + \sin. B$; et $2CG = CN + CO = \cos. A + \cos. B$. De plus on a, $BP = \sin. A - \sin. B$; DP ou $ON = \cos. B - \cos. A$; $EH = \sin. \frac{A+B}{2}$; $CH = \cos. \frac{A+B}{2}$; $BF = \sin. \frac{A-B}{2}$; $CF = \cos. \frac{A-B}{2}$; $EI = \text{tang}. \frac{A+B}{2}$; $EM = \text{tang}. \frac{A-B}{2}$; $EK = \text{cotang}. \frac{A+B}{2}$.

Les deux triangles semblables CFG, CEH donnent :

FG : EH :: CF : CE, ou I. 2FG : 2EH :: CF : CE ;

CG : CH :: CF : CE, ou II. 2CG : 2CH :: CF : CE.

Les deux triangles semblables BPD, CHE donnent ;

BP : BD :: CH : CE, ou III. BP : 2BF :: CH : CE ;

DP : BD :: EH : CE, ou IV. DP : 2BF :: EH : CE.

Les triangles semblables VGF, FSB, et la propriété des paralleles, donnent FG : BS :: FV : BF :: EI : EM ; donc

V. 2FG : 2BS ou BP :: EI : EM.

Enfin les triangles semblables ZRF, BSF, et les paralleles FZ, EK, donnent, FR ou CG : FS :: FZ : FB :: EK : EM ; donc

VI. 2CG : 2FS ou DP :: EK : EM.

Or, ces six proportions, traduites en valeurs trigonométriques, reviennent à celles qui forment l'énoncé du lemme.

Toutes ces proportions ne nous seront pas utiles pour la suite ; mais comme elles se démontrent toutes par la même Figure, et qu'elles sont curieuses d'ailleurs, j'ai cru devoir les donner ensemble.

499. Théorème VII. *Dans un triangle sphérique quelconque* BCA (Fig. 258), *la cotangente de la demi-somme des angles* A *et* B, *à la base, est à la tangente de leur demi-différence, comme la tangente de la moitié de l'angle du sommet* C, *est à la tangente de l'angle que forme*

l'arc CD *perpendiculaire à la base, avec l'arc* CE *qui divise en deux parties égales l'angle* C.

Car on a (494), cos. B : cos. A :: sin. BCD : sin. ACD; d'où l'on tire par la théorie des proportions, cos. B + cos. A : cos. B — cos. A :: sin. BCD + sin. ACD : sin. BCD — sin. ACD. Or, par le lemme précédent, cotang. $\frac{A+B}{2}$. tang. $\frac{A-B}{2}$ :: cos. B + cos. A : cos. B — cos. A :: sin. BCD + sin. ACD : sin. BCD — sin. ACD :: tang. $\frac{BCA}{2}$: tang. DCE.

500. Théorême VIII. *Dans un triangle sphérique quelconque* BCA, *le cosinus de l'un* A *des angles, est égal à la différence qui existe entre le produit du quarré du rayon par le cosinus du côté opposé* BC, *et le produit du rayon par les cosinus des deux côtés adjacents* AB, AC, *divisée par le produit des sinus des deux mêmes côtés; c'est-à-dire qu'on a*, cos. A = $\frac{R^2 \text{ cos. BC} - R \text{ cos AB. cos. AC}}{\text{sin. AB sin. AC}}$.

De l'angle C, abaissons l'arc CD perpendiculaire sur AB; et nommons, pour abréger un peu, a, b, c, les trois côtés AB, BC, AC; f le segment AD, et par conséquent $a-f$ l'autre segment BD.

Le triangle rectangle ADC donne (489), R : cos. A :: tang. c : tang. $f = \frac{\text{cos A tang. } c}{R}$. Mais (447), tang. $f = \frac{R \text{ sin. } f}{\text{cos. } f}$, et tang. $c = \frac{R \text{ sin. } c}{\text{cos. } c}$. Ainsi $\frac{\text{sin. } f}{\text{cos. } f} = \frac{\text{cos. A sin. } c}{R \text{ cos. } c}$, ou

(A) Cos. A sin c cos. f = R sin. f cos. c.

L'autre triangle rectangle BDC donne (492), cos. f : cos. $(a-f)$ :: cos c : cos. b; et par conséquent cos. f. cos. b = cos. c cos. $(a-f)$. Mais (449) cos. $(a-f)$ = $\frac{\text{cos. } a \text{ cos. } f + \text{sin. } a \text{ sin. } f}{R}$. Donc cos. f cos. b = $\frac{\text{cos. } c \text{ cos. } a \text{ cos. } f + \text{cos. } c \text{ sin. } a \text{ sin. } f}{R}$; ce qui donne cos. f =

$\frac{\cos.\ c\ .\ \sin.\ a\ .\ \sin.\ f}{R\ \cos.\ b - \cos.\ c\ \cos.\ a}$. Substituant cette valeur de cos. f, dans l'équation (A), divisant tout par sin. f cos. c, et dégageant cos. A, on trouvera

(B) $\text{Cos. A} = \frac{R^2 \cos.\ b - R\ \cos.\ a\ \cos.\ c}{\sin.\ a\ \sin.\ c}$:

Equation du théorême.

501. *Remarque.* Cette expression de cos. A, considérée analytiquement, est assez simple; mais, dans les applications à la pratique, elle ne se prête pas bien commodément aux abréviations de calcul que les logarithmes fournissent, parcequ'elle est composée de deux termes qu'il faut calculer séparément. Le théorême suivant va nous conduire à la connoissance de l'angle A, d'une autre maniere plus détournée, mais exempte de l'inconvénient que je viens de remarquer.

502. Théorême IX. *Dans un triangle sphérique quelconque* BAO, *le produit des sinus des côtés* AB, AC, *qui comprennent l'angle* A, *est au produit des sinus des deux excès de la demi-somme des trois côtés du triangle, sur chacun des mêmes côtés* AB, AC, *comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle* A.

En substituant dans l'équation (B), à la place de cos. A sa valeur $\frac{R^2 - 2\left(\sin.\ \frac{A}{2}\right)^2}{R}$ (451), et dégageant $2\left(\sin.\ \frac{A}{2}\right)^2$, on trouvera

$$2\left(\sin.\ \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{R^2\ (\cos.\ a \cos.\ c + \sin.\ a\ \sin.\ c) - R^2 \cos.\ b}{\sin.\ a\ \sin.\ c}.$$

Mais (449) cos. a cos. c + sin. a sin. c = R cos. $(a - c)$. Ainsi,

$$2\left(\sin.\ \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{R^2(\cos.\ (a - c) - \cos.\ b)}{\sin.\ a\ \sin.\ c}.$$

Regardant $a - c$, comme un arc simple x, en sorte que cos. $(a - c)$ — cos. b = cos. x — cos. b: le numéro IV de l'article 498 nous donnera ici cos. x — cos. b =

$\frac{2\sin.\frac{b-x}{2}\times\sin.\frac{b+x}{2}}{R}$. Ainsi, on aura

$$(\sin.\tfrac{A}{2})^2=\frac{R^2(\sin.\frac{b-x}{2}\times\sin.\frac{b+x}{2})}{\sin.a\sin.c}$$

Eliminons x, et nous aurons

$$(\sin.\tfrac{A}{2})^2=\frac{R^2\sin.\frac{(b-a+c)}{2}\times\sin.\frac{(b+a-c)}{2}}{\sin.a\sin.c}.$$

De là, en nommant S la demi-somme $\frac{b+a+c}{2}$ des trois côtés, et observant que $\frac{b-a+c}{2}=\frac{b+a+c}{2}-a=S-a$, et que de même $\frac{b+a-c}{2}=S-c$, on obtiendra

$$(\sin.\tfrac{A}{2})^2=\frac{R^2\sin.(S-a)\sin.(S-c)}{\sin.a\sin.c}:$$

Equation d'où résulte la proportion qui forme l'énoncé du théorême.

503. *Corollaire I.* Si le triangle BAC, étoit isoscele, ou AB = AC, on auroit sin. c = sin. a, sin. $(S-c)$ = sin. $(S-a)$; et l'équation précédente donneroit (en tirant la racine quarrée de chaque membre),

$$\sin.\tfrac{A}{2}=\frac{R\sin.(S-a)}{\sin.a}.$$

D'où résulte la proportion, sin. a : sin. $(S-a)$ :: R : sin. $\frac{A}{2}$.

504. *Corollaire II.* Supposons que les côtés du triangle sphérique quelconque BAC deviennent infiniment petits : la proportion générale du théorême a toujours lieu ; mais dans l'hypothese actuelle, le triangle peut être considéré comme rectiligne ; chaque côté peut être pris pour son sinus ; l'excès de la demi-somme des trois côtés sur un côté, peut être pris pour le sinus de ce même excès. Ainsi, en appliquant

théorème aux triangles rectilignes, et considérant que les propriétés d'un triangle rectiligne qui a les côtés infiniment petits, sont les mêmes pour un triangle rectiligne semblable, dont les côtés sont finis ; nous conclurons en général que, *dans tout triangle rectiligne, le produit de deux côtés qui comprennent un angle, est au produit des deux excès de la demi-somme des trois côtés sur chacun des deux côtés proposés, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de l'angle qu'ils comprennent.*

De là résulte un nouveau moyen de trouver tel angle qu'on voudra d'un triangle rectiligne dont on connoît les trois côtés.

Tab. I. *Résol. d'un triangle rectangle sphérique* BAC (Fig. 257).

CAS	DONNÉES	TROUVER	SOLUTION.
1	L'hypoténuse BC, et l'angle B	Le côté opposé AC	R : sin. B :: sin. BC : sin. AC (487).
2	Mêmes données que dans le cas précédent	Le côté adjacent BA	R : cos. B :: tang. BC : tang BA (489).
3	Mêmes données	L'autre angle C	R : cos. BC :: tang. B : cotang. C (497).
4	L'hypoténuse BC ; et le côté BA	L'autre côté AC	Cos. BA : cos. BC :: R : cos. AC (491).
5	Mêmes données que dans le cas précédent	L'angle opposé C	Sin. BC : sin. BA :: R : sin. C (487).
6	Mêmes données	L'angle adjacent B	Tang. BC : tang. BA :: R : cos. B (489).
7	Un côté BA, et l'angle adjacent B	L'autre côté AC	R : sin. BA :: tang. B : tang. AC (495).
8	Mêmes données que dans le cas précédent	L'angle opposé C	R : sin. B :: cos. BA : cos. C (493).

9	Mêmes données	L'hypoténuse BC	Cos. B : R :: tang. BA : tang. BC (489).
10	Un côté B A, et l'angle opposé C	L'autre côté AC	Tang. C : tang. BA :: R : sin. AC (495).
11	Mêmes données que dans le cas précédent	L'angle adjacent B	Cos. BA : cos. C :: R : sin. B (493).
12	Mêmes données	L'hypoténuse BC	Sin. C : sin. BA :: R : sin BC (487).
13	Les deux côtés BA, AC	L'hypoténuse BC	R : cos. BA :: cos. AC : cos. BC (491).
14	Mêmes données que dans le cas précédent	Un angle tel que B	Sin. BA : R :: tang. AC · tang. B (495).
15	Les deux angles B et C	Un côté tel que BA	Sin. B : cos. C :: R : cos. BA (493).
16	Mêmes données que dans le cas précédent	L'hypoténuse BC	Tang. B : cotang. C :: R : cos. BC (497).

Tab. II. *Résol. d'un triangle sphérique quelconque* BAC (Fig. 258).

CAS	DONNÉES	TROUVER	SOLUTION.
1	Deux côtés CA, CB, et l'angle A opposé à l'un d'eux	L'angle B, opposé à l'autre côté	Sin. CB : sin. CA :: sin. A : sin. B (488).
2	Mêmes données que dans le cas précédent	L'angle compris ACB	Abaissez l'arc CD perpendiculaire sur AB, prolongé s'il le faut; alors (497) vous aurez la proport. : R : cos. AC :: tang. A : cotang. ACD; ce qui donne l'angle ACD. Ensuite (490), tang. CB : tang. CA :: cos. ACD : cos. BCD; ce qui donne l'angle BCD; donc l'angle ACB (somme ou différence des angles ACD, BCD) sera connu.
3	Mêmes données	Le troisième côté AB	R : cos. A :: tang. AC : tang AD (489); cos. AC : cos. BC :: cos. AD : cos. BD (492).
4	Deux côtés AB, AC, et l'angle compris A	L'autre côté BC	R : cos. A :: tang. AC : tang. AD (489); ce qui donne BD. Ensuite (492); cos. AD : cos. BD :: cos. AC : cos. BC.
5	Mêmes données	L'un des deux autres angles, par exemple, B	R : cos. A :: tang. AC : tang AD (489); sin. BD : sin. AD :: tang. A : tang. B (496).
6	Deux angles A et C, et le côté adjacent AC	L'autre angle B	R : cos. AC :: tang. A : cotang. ACD (497); ce qui donne l'ang. BCD. Ensuite (494), sin. ACD : sin. BCD :: cos. A : cos. B.

7	Mêmes données que dans le cas précédent	L'un des deux autres côtés, par exemple, BC	R : cos. AC :: tang. A : cotang. ACD (497) ; cos. BCD : cos. ACD :: tang. AC : tang. BC (490).
8	Les deux angles A et B, et le côté AC opposé à l'un deux	Le côté BC opposé à l'autre	Sin. B : sin. A :: sin. AC : sin. BC (488).
9	Mêmes données que dans le cas précédent	Le côté adjacent AB	R ; cos. A :: tang. AC : tang. AD (489) ; tang. B : tang. A :: sin. AD : sin. BD (496).
10	Mêmes données	L'autre angle C	R : cos. AC :: tang. A : cotang. ACD (497) ; cos. A : cos. B :: sin. ACD : sin. BCD (494).
11	Les trois angles A, B, C	Un côté, par exemple, AC	Cotang. $\frac{A+B}{2}$: tang. $\frac{A-B}{2}$ :: tang. $\frac{C}{2}$: tang. DCE (498) ; ce qui donne l'angle ACD. Ensuite (497), tang. A : cotang. ACD :: R : cos. AC.
12	Les trois côtés AB, AC, BC	Un angle, par exemple, A	Sin. AB × sin. AC : sin. $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right)$ × sin. $\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right)$ :: $R^2 : \left(\sin. \frac{A}{2}\right)^2$ (502).

Observations sur les deux Tables précédentes.

La chose inconnue, c'est-à-dire l'angle ou le côté qu'on cherche, et qui forme le quatrieme terme de chaque analogie, peut quelquefois équivaloir indifféremment à un angle aigu ou à son supplément; ce qui donne alors deux solutions. Pour voir en général ce que la chose inconnue peut être, on se rappellera qu'en nommant x un arc quelconque, moindre que 90°, et par conséquent $180° - x$ son supplément: on a sin. $(180° - x) =$ sin. x; cos. $(180° - x) = -$ cos. x; tang. $(180° - x) = -$ tang. x; cotang. $(180° - x) = -$ cotang. x. De sorte qu'un angle aigu et son supplément ont le même sinus, tant pour la quantité que pour le signe; et qu'ils ont le même cosinus, la même tangente, la même cotangente, seulement pour la quantité, et non pour le signe. D'après ces principes, on voit, par exemple, que connoissant (Tab. I, Cas 12), sin. C et sin. BA; le quatrieme terme sin. BC de la proportion pourra appartenir ou à un angle aigu ou à son supplément; de même (Tab. II, Cas 1) le quatrieme terme de la proportion peut appartenir à un angle aigu ou à son supplément; si (Tab. I, Cas 7), l'angle B est moindre que 90°, le côté AC sera moindre que 90°, et si B vaut plus de 90°, le côté AC vaudra plus de 90°; etc.

APPLICATION
DE L'ALGEBRE
A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de l'application de l'Algebre à la Géométrie.

1. Les quantités qui font l'objet de la géométrie, c'est-à-dire les lignes, les superficies et les solides, ont entre elles des rapports qui peuvent être exprimés par des équations, suivant les regles que l'algebre prescrit pour le calcul des grandeurs en général. C'est dans l'art de former ces équations que consiste l'application de l'algebre ou de l'analyse à la géométrie.

2. On a pu remarquer dans le traité précédent, sur-tout dans la trigonométrie, plusieurs propositions démontrées par des calculs fondés sur les propriétés des figures. Il n'est guere possible, en effet, de ne pas introduire, même dans la géométrie élémentaire, la méthode analytique, sans se jeter souvent dans des raisonnements longs, abstraits, capables de fatiguer ou même d'accabler l'attention des commençants, qu'il est très essentiel de ménager. J'ai donc cru devoir puiser de temps en temps dans l'analyse un moyen court et facile de découvrir et de présenter la vérité; mais j'en ai fait un usage sobre, et seulement dans les occasions

qui m'ont paru l'exiger. Ici je me propose de développer plus expressément l'art d'appliquer l'algebre à la géométrie, et de mettre le lecteur sur la voie d'approfondir cette branche intéressante de la géométrie moderne.

3. Quelle que soit l'espece d'un problême, il faut, pour le résoudre, examiner attentivement ses conditions, exprimer ces conditions par des équations, sans distinguer les quantités inconnues d'avec celles qui sont données, et tirer de l'équation finale la valeur de l'inconnue dont on a besoin. Les quantités qui entrent dans les problêmes de géométrie ont, les unes par rapport aux autres, des propriétés primordiales, qui sont connues, ou par la nature de la grandeur en général, ou par les éléments de géométrie, et qui servent à lier ensemble par des équations les propriétés caractéristiques et individuelles de la question qu'on veut résoudre. Voici quelques unes de ces propriétés générales, dont nous ferons un fréquent usage.

4. Un tout est égal à la somme de toutes ses parties. Ainsi, lorsque dans un tout, composé d'un certain nombre de parties, on aura l'expression algébrique de ce tout et de ses parties, à l'exception d'une, on aura l'expression de celle-ci, en retranchant de la valeur du tout la somme des valeurs des parties dont on a les expressions particulieres.

Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Ainsi, lorsqu'on a les expressions de trois termes, on a aussi celle de l'extrême inconnu, ou du moyen inconnu, en divisant le produit des moyens par l'extrême connu, ou le produit des extrêmes par le moyen connu.

Dans les triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels. C'est sur-tout par l'égalité des angles qu'on reconnoît la similitude de deux triangles. Ainsi nos lecteurs doivent avoir très présentes à l'esprit les propositions que nous avons démontrées concernant la similitude des triangles dans le traité précédent.

Dans le triangle rectangle, le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.

La surface d'un triangle quelconque est égale à la moitié du produit de sa base et de sa hauteur.

Dans tout triangle rectiligne, les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés, etc.

Ces théorèmes généraux et d'autres semblables sont la base des équations qui contiennent la relation des éléments d'un problème géométrique; et ces équations deviennent elles-mêmes la source de plusieurs autres théorèmes, que le calcul donne tout seul, parcequ'il ne s'agit plus alors que d'opérer sur des quantités purement algébriques.

5. Souvent, pour pouvoir employer les théorèmes généraux que je viens d'indiquer, on est obligé de combiner les quantités données par les conditions d'un problème avec d'autres qui en dépendent, et qui n'existent pas dans la Figure qu'on s'est faite pour représenter les premieres. Alors il faut tirer dans la Figure de nouvelles lignes, qui s'enchaînent par des rapports connus avec celles qui y sont déja tracées. Tantôt on prolongera certaines lignes, ou indéfiniment, ou jusqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres, ou qu'elles deviennent d'une longueur donnée; tantôt on menera de quelque point remarquable des lignes parallèles ou perpendiculaires à d'autres lignes; tantôt on joindra des points remarquables; quelquefois on construira une nouvelle Figure pour pouvoir combiner ensemble plus commodément les éléments de la question, au moyen de certains théorèmes qu'on croit les plus propres à cet usage.

Ainsi, si deux lignes qui ne se rencontrent point font des angles donnés avec une troisieme ligne, on peut les prolonger jusqu'à ce qu'elles forment un triangle dont les angles, et par conséquent les rapports des côtés, sont donnés.

Si un angle est donné, ou qu'il soit égal à quelque autre angle, on peut former un triangle donné d'espece, ou semblable à un autre triangle.

Si on a un triangle acutangle ou obtusangle, on peut

former deux triangles rectangles, en abaissant de l'un des angles une perpendiculaire sur le côté opposé, ou sur son prolongement.

S'il est question de figures qui aient plus de trois côtés, on peut les décomposer en triangles en y menant des diagonales, etc.

6. Lorsqu'on aura choisi l'ordre et la méthode qu'on juge devoir donner, de la maniere la plus simple, la solution d'un problème, et qu'on aura tracé en conséquence la Figure qui doit fournir les éléments du calcul, on donnera des noms aux différentes lignes que cette Figure contient. Ensuite on combinera les quantités connues avec celles qui ne le sont pas ; et l'on tâchera de former des équations, soit en comparant ensemble deux différentes valeurs d'une même inconnue qui a un nom particulier, soit en cherchant deux valeurs d'une même quantité qui n'a pas de nom, mais qui dérive de celles qui en ont.

7. Il y a souvent de l'adresse à nommer convenablement les quantités qui doivent être combinées ensemble de la maniere que je viens d'exposer. C'est ce qu'on apprendra mieux dans la suite par des exemples que je ne pourrois le faire sentir ici par des préceptes. Je me contenterai d'observer, quant à présent, qu'il n'est pas nécessaire de donner des noms aux quantités dont la valeur peut se déduire de celles qu'on a déja nommées. Par exemple, ayant nommé une ligne que je suppose divisée en deux parties, et l'une de ses parties, on n'a pas besoin d'une nouvelle lettre pour désigner l'autre partie, puisqu'elle se trouve par une simple soustraction : de même ayant nommé les deux côtés d'un triangle rectangle, l'hypoténuse aura tout de suite un nom, puisqu'elle est égale à la racine quarrée de la somme des quarrés des deux côtés, etc. Mais quelquefois, pour faciliter et simplifier le calcul, on représente par une lettre particuliere une quantité qu'on peut déduire immédiatement des autres, et on n'élimine cette lettre qu'après avoir formé toutes les équations qui expriment les conditions du problème.

8. Il en est des problèmes de géométrie comme de ceux d'algebre pure. Si dans l'équation finale il ne se trouve qu'une inconnue, le problème est déterminé; et il est du premier degré, du second degré, du troisieme, etc., selon que l'équation finale est du premier degré, ou du second, ou du troisieme, etc. Si l'équation finale contient plus d'une inconnue, le problème est indéterminé, et il est du même degré que cette équation.

9. Quand on est parvenu à l'équation finale d'un problème, on cherche dans la Figure déja construite, ou dans une nouvelle Figure que l'on construit exprès pour cet usage, l'expression géométrique de l'inconnue, ou des inconnues. Cette opération s'appelle la *construction de l'équation*. Les équations déterminées du premier et du second degrés se construisent par des principes tirés des éléments de géométrie, comme on le verra ci-dessous. Les équations déterminées des degrés supérieurs au second, et les équations indéterminées, dépendent, pour leur construction, de la théorie des lignes courbes.

Venons à des applications.

CHAPITRE II.

Solutions de plusieurs problèmes déterminés des deux premiers degrés.

10. Problème I. TROUVER *sur le côté* BA *d'un triangle rectangle* BAC (Fig. 1) *un point* D *qui soit tel que, si l'on mene la droite* DE *parallele au second côté* AC, *et terminée en* E *par l'hypoténuse, le quarré* $(DE)^2$ *de cette ligne soit égal au rectangle* $BD \times DA$, *qui auroit pour côtés contigus à un même angle les segments* BD, DA.

Le triangle BAC étant donné, toutes ses dimensions sont données. Mais le point D étant inconnu, les droites BD,

DA, sont aussi inconnues; et on voit que le problème sera résolu si l'on peut parvenir à trouver ces lignes. Je nomme AB, a; AC, b; l'inconnue BD, x; mais je ne donne point de nom à DA, parceque cette ligne étant la différence des lignes BA, BD, elle est représentée tout de suite par $a-x$.

Cela posé, on aura premièrement BD $\times$ DA $= x(a-x) = ax - xx$. De plus, quelle que soit la position du point D, il est clair que la droite DE étant supposée parallele à AC, les deux triangles BAC, BDE seront toujours semblables, et que par conséquent on aura la proportion, BA (a) : AC (b) :: BD (x) : DE. Donc DE $= \frac{bx}{a}$; et $(DE)^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Or, suivant les conditions du problème, on doit avoir $(DE)^2 =$ BD $\times$ DA. Ainsi on aura l'équation $\frac{b^2x^2}{a^2} = ax - xx$. D'où l'on tire $x = 0$, et $x = \frac{a^3}{aa+bb}$.

La premiere valeur indique que le point D doit tomber sur le point B; alors le quarré de DE devient zéro, et peut être censé égal au rectangle BD $\times$ DA, qui est aussi zéro, puisque le facteur BD est zéro.

La seconde valeur de x est proprement celle qu'on cherchoit; et voici comment elle se construit.

Il est permis de regarder x comme le quatrieme terme d'une proportion dont le premier est $aa+bb$, le second aa, et le troisieme a, puisqu'une telle proportion donne $x = \frac{a^3}{aa+bb}$. Or, pour avoir les expressions géométriques des termes de cette proportion, je me rappelle la propriété du triangle rectangle démontrée (Géom. 188); et j'observe que si de l'angle droit A (Fig. 2) on mene AE perpendiculaire sur l'hypoténuse BC, et, du point E, ED perpendiculaire sur BA, on aura $(BA)^2 : (BE)^2 ::$ BA : BD. Or les deux triangles rectangles BEA, BAC, sont évidemment semblables. Ainsi on aura BA : BE :: BC : BA; et par conséquent (Théor. des proportions), $(BA)^2 : (BE)^2 :: (BC)^2 : (BA)^2$. Donc $(BC)^2 : (BA)^2 ::$ BA : BD; c'est-à-dire $aa+bb$:

$aa :: a$: BD. Donc BD $= x$. Ainsi le point D, déterminé par la construction précédente, est le point demandé.

11. Problème II. *Inscrire un quarré dans un triangle donné* ABC (Fig. 3).

Imaginons que DEKF est le quarré cherché. Du sommet A, abaissons sur la base BC la perpendiculaire AH, qui rencontre en quelque point M le côté DF de ce quarré.

Supposons $\begin{cases} \text{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a, \\ \text{AH} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h, \\ \text{AM} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = x, \end{cases}$

et par conséquent MH ou DE ou FK $\ldots\ldots = h - x$.

Les deux premieres lignes BC, AH, sont connues, puisque toutes les dimensions du triangle ABC sont données; mais les autres lignes AM, DE ou MH ou FK, sont inconnues.

Les droites BC, DF, étant paralleles, on a (Géom. 149), BC : DF :: AB : AD :: AH : AM; c'est-à-dire, en comparant seulement le premier rapport au troisieme, et mettant pour BC, AH, AM, leurs valeurs algébriques, a : DF :: h : x; et par conséquent DF $= \frac{ax}{h}$. Or, suivant les conditions du problème, on doit avoir DF $=$ DE. Ainsi on aura l'équation $\frac{ax}{h} = h - x$; d'où l'on tire $x = \frac{hh}{a+h}$.

Pour construire cette valeur, je décris (Fig. 4) du point A pour centre, avec un rayon AO égal à AH + BC, un arc de cercle qui coupe la base CB prolongée, au point O; du point H, j'abaisse HR perpendiculaire à AR. Ensuite, ayant pris AM $=$ AR, je mene par le point M la droite DF parallele à BC, et par les points D et F les perpendiculaires DE, FK, à BC. Alors DEKF est le quarré demandé. En effet, on a (Géom. 188), $(\text{AO})^2 : (\text{AH})^2 :: \text{AO} : \text{AR} = \frac{(\text{AH})^2}{\text{AO}} = \frac{hh}{a+h}$; ce qui est la valeur de x. Donc le point M, déterminé par la construction précédente, est celui par lequel doit passer le côté DF du quarré cherché; ce qui suffit pour achever la construction de ce quarré.

12. Problème III. *Deux cercles* X *et* Y (Fig. 5 et 6) *étant donnés de grandeur et de position sur un plan, mener une ligne* MN *qui les touche l'un et l'autre.*

Supposons que la tangente MN, prolongée, s'il est nécessaire, rencontre en S la droite CO, qui joint les centres des deux cercles proposés. Ayant mené les rayons CM, ON, aux points de contingence M et N, et ayant abaissé la perpendiculaire MA sur la ligne des centres; prenons

quantités connues, $\begin{cases} \text{CO} = a, \\ \text{CM} = b, \\ \text{ON} = c, \end{cases}$

l'inconnue $\text{CA} = x$.

Cela posé, les triangles rectangles semblables CAM, CMS, ONS, donnent les deux proportions suivantes:

$$\text{CA}(x) : \text{CM}(b) :: \text{CM}(b) : \text{CS} = \frac{bb}{x},$$

$$\text{CA}(x) : \text{CM}(b) :: \text{ON}(c) : \text{OS} = \frac{bc}{x}.$$

Or (Fig. 5) on a $\text{CS} = \text{CO} + \text{OS}$, et (Fig. 6) $\text{CO} = \text{CS} + \text{OS}$, ou $\text{CS} = \text{CO} - \text{OS}$. Donc, en comprenant les deux cas dans une même équation, à l'aide du double signe $\pm$, on aura $\frac{bb}{x} = a \pm \frac{bc}{x}$; d'où l'on tire $x = \frac{b(b \mp c)}{a}$.

Cette valeur de x se construit en cherchant (Géom. 156) une quatrieme proportionnelle aux trois lignes représentées par a, b et $(b \mp c)$; car cette quatrieme proportionnelle aura pour expression $\frac{b(b \mp c)}{a}$, et sera par conséquent l'inconnue x. Connoissant ainsi la position du point A, si par ce point on éleve perpendiculairement à CO la droite AM, et qu'ensuite ayant mené le rayon CM on lui éleve au point M une perpendiculaire, cette perpendiculaire touchera les deux cercles.

13. Problème IV. *Les deux demi-cercles* ABD, OPD (Fig. 7), *étant supposés se toucher en* D, *et l'ordonnée* OB *étant perpendiculaire à l'extrémité* O *du diametre* DO *du demi-cercle intérieur, décrire un cercle* KPH, *qui touche*

les trois côtés BO, OPD, DHB, *du triangle mixtiligne* BOPDHB.

Soient les trois points C, F, G, les centres des deux demi-cercles donnés ABD, OPD, et du cercle cherché KPH. Les points C, G, et le point H d'attouchement de la circonférence KPH avec la demi-circonférence ABD, sont situés (Géom. 95) sur une même ligne droite CGH; de même, les points F, G, et le point P d'attouchement de la circonférence KPH avec la demi-circonférence OPD, sont situés sur une même ligne droite FPG. Du centre G au point d'attouchement K de la circonférence KPH avec l'ordonnée BO, menez le rayon GK, qui sera nécessairement perpendiculaire à OB (Géom. 93); abaissez aussi du même point G la perpendiculaire GE sur OD. Cela posé, nommons

quantités connues, { CD. . . . . a, ; OF ou FD . . . . . b,

inconnues, { FG. . . . . x, ; FE. . . . . y.

Il est clair d'abord qu'on aura $CF = a - b$, EO ou GK ou GP ou $GH = b - y$, $CE = a - b - y$, $CG = CH - GH = a - b + y$, $(GE)^2 = xx - yy$.

Le triangle rectangle CEG donne $(CG)^2 = (CE)^2 + (EG)^2$, c'est-à-dire, en termes analytiques, $(a-b+y)^2 = (a-b-y)^2 + xx - yy$; ce qui se réduit à

I. $4ay - 4by + yy = xx$.

De plus, on a $FG = FP + PG$, c'est-à-dire

II. $x = 2b - y$, et $xx = 4bb - 4by + yy$.

Mettons cette valeur de xx dans l'équation I, nous trouverons $y = \frac{bb}{a}$. Ensuite mettons cette valeur de y dans l'équation II, nous aurons $x = 2b - \frac{bb}{a}$.

Il est clair que la valeur géométrique de y est une troisieme proportionnelle aux deux lignes représentées par a et b, c'est-à-dire aux deux rayons CD, FD, laquelle se trouve (Géom. 157), et que la valeur géométrique de x est ce qui reste du diametre OD, après en avoir retranché la troisieme proportionnelle dont on vient de parler.

noissant donc ainsi FE et FG, il ne s'agira plus, pour déterminer la position du centre G, que d'élever par le point E une perpendiculaire indéfinie EG sur OD, et que de décrire du centre F, avec un rayon égal à la valeur qu'on a trouvée pour FG ou x, un arc de cercle; cet arc coupera la droite EG au point cherché G. Enfin, on abaissera du point G la perpendiculaire GK sur OB, et on décrira avec le rayon GK le cercle KPH, qui remplit les conditions du problème.

14. Problème V. *Connoissant l'angle* BAC (Fig. 8), *situé dans un plan incliné à l'horizon, et les deux angles* BAb, CAc, *que font les côtés* AB, AC, *avec les horizontales* Ab, Ac, *qui sont contenues dans deux plans verticaux menés suivant ces côtés, on demande l'angle* bAc, *qui est la projection de l'angle* BAC *sur le plan de l'horizon.*

Du point C, pris arbitrairement sur AC, je mene CB perpendiculaire à AB; et ayant abaissé des points B et C les verticales Bb, Cc, qui rencontrent les horizontales Ab, Ac, aux points b, c, je tire la droite bc. Du point C, je mene Cd perpendiculaire à Bb, et du point c, cf perpendiculaire à Ab. Cela posé,

Nommons
- le sinus total ou le rayon des tables . . . r,
- le sinus de l'angle BAC . . . . . a,
- son cosinus . . . . . b,
- le sinus de l'angle BAb . . . . . c,
- son cosinus . . . . . d,
- le sinus de l'angle CAc . . . . . e,
- son cosinus . . . . . f,
- le sinus de l'angle inconnu bAc . . . . . x,
- son cosinus . . . . . y,
- la ligne AC . . . . . m,

quantités parmi lesquelles il n'y a que x et y d'inconnues.

Dans le triangle rectangle BCA on a (Géom. 458),

$$r : \text{sin. BAC } (a) :: \text{AC } (m) : \text{BC} = \frac{ma}{r},$$

angle par des raisonnements et des calculs entièrement semblables à ceux qui ont servi à trouver le cosinus et le sinus de l'angle bAc. Donc les équations en y et en x doivent renfermer les deux cas. Donc ces équations doivent être telles que pour un même y on ait deux x.

16. *Remarque II.* Quoique l'expression analytique que nous avons trouvée pour y soit fort simple, elle n'est pas assez commode pour le calcul trigonométrique et pratique, où il convient d'employer, autant qu'il est possible, des formules à un seul terme, afin d'y pouvoir faire aisément usage des abréviations que fournissent les tables des logarithmes. Mais si, au lieu de l'équation $y = \frac{br^2 - cer}{fd}$, on écrit l'équation équivalente $\frac{r}{2} - \frac{y}{2} = \frac{r}{2} - (\frac{br^2 - cer}{2fd})$, ou $\frac{r-y}{2} = \frac{r(fd+ce-br)}{2fd}$, chaque membre sera facilement réductible à la forme que je viens d'indiquer.

En effet, tout demeurant d'ailleurs le même, nommons de plus $2n$ l'angle BAC, que font ensemble les deux lignes inclinées AB, AC; $2p$ l'angle que fait AB avec la verticale; $2q$ l'angle que fait AC avec la verticale; $2z$ l'angle de projection bAc; nous aurons en conséquence $b = \cos. 2n$, $c = \cos. 2p$, $d = \sin. 2p$, $e = \cos. 2q$, $f = \sin. 2q$, $y = \cos. 2z$.

Cela posé, 1°. on a (Géom. 451, n°. III), $\frac{r - \cos. 2z}{2} = \frac{(\sin. z)^2}{r}$. Ainsi $\frac{r-y}{2} = \frac{(\sin. z)^2}{r}$.

2°. On a (Géom. 450, n°. III), $\sin. (n + p - q) \times \sin. (n + q - p) = \frac{r \cos. (2p - 2q)}{2} - \frac{r \cos. 2n}{2} = \frac{\cos. 2p \cos. 2q + \sin. 2p \sin. 2q}{2} - \frac{r \cos. 2n}{2}$, en mettant pour $\cos. (2p - 2q)$ sa valeur $\frac{\cos. 2p \cos. 2q + \sin. 2p \sin. 2q}{r}$,

17.

(Géom. 449, n°. IV). Substituant dans le second membre pour sin. $2p$, cos. $2p$, sin. $2q$, cos. $2q$, cos. $2n$, leurs valeurs, on aura, sin. $(n+p-q)\times$ sin. $(n+q-p) = \frac{ce+df-br}{2}$, et $\frac{r\times\text{sin.}\,(n+p-q)\times\text{sin.}\,(n+q-p)}{\text{sin.}\,2p\,\text{sin.}\,2q} = \frac{r\,(ce+df-br)}{2fd}$.

Ainsi l'équation $\frac{t-y}{2} = \frac{r\,(ce+df-br)}{2fd}$ deviendra

$$(\text{sin.}\,z)^2 = \frac{r^2\times\text{sin.}\,(n+p-q)\times\text{sin.}\,(n+q-p)}{\text{sin.}\,2p\,\text{sin.}\,2q},$$

ou, ce qui revient au même, en faisant, pour abréger, $n+p+q=\text{S}$),

$$(\text{sin.}\,z)^2 = \frac{r^2\times\text{sin.}\,(\text{S}-2q)\times\text{sin.}\,(\text{S}-2p)}{\text{sin.}\,2p\,\text{sin.}\,2q}.$$

Par où l'on voit que, *pour trouver le quarré du sinus de la moitié de l'angle de projection, il faut multiplier le quarré du rayon par le produit des sinus des deux excès de la moitié de la somme des trois angles* 2n, 2p, 2q, *sur chacun des deux angles* 2p, 2q, *puis diviser par le produit des sinus des deux angles* 2p, 2q : formule à laquelle on applique facilement le calcul trigonométrique et logarithmique.

Supposons, par exemple, $2n=18$ degrés, $2p=88°$, $2q=89°$, et par conséquent $\text{S}-2q=8°\,30'$, $\text{S}-2p=9°\,30'$. Le calcul se fera ainsi par les tables des logarithmes.

log. r^2. . . . . =	20,0000000
log. sin. (S—2q). . . . . =	9,1697021
log. sin. (S—2p). . . . . =	9,2176092
Somme.	38,3873113
log. sin. 2p. . . . . =	9,9997354
log. sin. 2q. . . . . =	9,9999338
Somme.	19,9996692
Retranchant la seconde somme de la premiere, restera.	18,38776421
Prenant la moitié de ce reste, on aura.	9,19388210

qui est le logarithme du sinus de l'angle z. Cherchant ce logarithme dans les tables, on trouvera que l'angle cor-

r : cos. BAC (b) :: AC (m) : AB $= \frac{mb}{r}$.

Dans les trois triangles rectangles BbA, CcA, cfA, on a pareillement

r : sin. BAb (c) :: AB $(\frac{mb}{r})$: Bb $= \frac{mbc}{r^2}$,

r : cos. BAb (d) :: AB $(\frac{mb}{r})$: AB $= \frac{mbd}{r^2}$,

r : sin. CAc (e) :: AC (m) : Cc $= \frac{me}{r}$,

r : cos. CAc (f) :: AC (m) : Ac $= \frac{mf}{r}$,

r : sin. fAc (x) :: Ac $(\frac{mf}{r})$: cf $= \frac{mfx}{r^2}$,

r : cos. fAc (y) :: AC $(\frac{mf}{r})$: Af $= \frac{mfy}{r^2}$.

Maintenant, on a Bd $=$ Bb $-$ db $=$ Bb $-$ Cc $= \frac{mbc}{r^2} - \frac{me}{r}$. Donc, à cause du triangle rectangle BdC, qui donne (dC)^2 $=$ (BC)^2 $-$ (Bd)^2, on aura (dC)^2 $= \frac{m^2a^2}{r^2} - (\frac{mbc}{r^2} - \frac{me}{r})^2$.

De même, on a bf $=$ Af $-$ Ab $= \frac{mfy}{r^2} - \frac{mbd}{r^2}$. Donc, à cause du triangle rectangle bfc, qui donne (bc)^2 $=$ (fc)^2 $+$ (bf)^2, on aura (bc)^2 ou (dC)^2 $= \frac{m^2f^2x^2}{r^4} + (\frac{mfy - mbd}{r^2})^2$.

Egalant entre elles les deux valeurs de (dC)^2, on aura l'équation $\frac{m^2a^2}{r^2} - (\frac{mbc}{r^2} - \frac{me}{r})^2 = \frac{m^2f^2x^2}{r^4} + (\frac{mfy - mbd}{r^2})^2$, qui devient d'abord (en effectuant les multiplications indiquées, chassant les fractions et divisant tout par m^2), $a^2r^2 - b^2c^2 + 2bcre - r^2e^2 = f^2x^2 + f^2y^2 - 2fbdy + b^2d^2$, ou bien $a^2r^2 + 2bcre = r^2e^2 + b^2(c^2 + d^2) + f^2 \times (x^2 + y^2) - 2fbdy$, ou bien (à cause de $c^2 + d^2 = r^2$, et de $x^2 + y^2 = r^2$), $a^2r^2 + 2bcre = r^2(e^2 + f^2) + r^2b^2 - 2fbdy$, ou bien encore (à cause de $e^2 + f^2 = r^2$), $r^2(a^2 - b^2) + 2bcre = r^4 - 2fbdy$; ou bien (en mettant pour $a^2 - b^2$

sa valeur $r^2 - 2b^2$, effaçant les termes qui se détruisent, et divisant tout par $2b$), $cer - br^2 = -fdy$; d'où l'on tire enfin $y = \frac{br^2 - cer}{fd}$. Connoissant y, on aura aussi x; car $x = \pm\sqrt{[r^2 - y^2]}$.

Pour construire la valeur de y, je la mets d'abord sous cette forme $y = \frac{r}{d}\left(\frac{br}{f} - \frac{ce}{f}\right)$; ensuite je cherche (Géom. 156) deux quatriemes proportionnelles : l'une aux trois lignes représentées par f, b, r; l'autre aux trois lignes représentées par f, c, e. Je retranche la seconde quatrieme proportionnelle de la premiere, et je nomme k la différence. Par-là nous aurons $y = \frac{rk}{d}$; et il ne s'agit plus, pour avoir l'expression géométrique de y, que de chercher une quatrieme proportionnelle aux trois lignes représentées par d, r, k.

Ce problème est utile dans la trigonométrie pour rapporter sur un même plan horizontal plusieurs objets inégalement élevés par rapport à ce plan.

15. *Remarque I.* On voit qu'à un même y répondent deux x, à cause du double signe qui affecte le radical $\sqrt{[r^2 - y^2]}$. En voici la raison. Imaginons que l'angle bAc, vu en raccourci (Fig. 8) soit rapporté en bAc (Fig. 9) dans sa grandeur naturelle ; et faisons l'angle bAc qui lui soit égal. Ensuite, ayant pris AM pour représenter le sinus total ou le rayon des tables, abaissons MM′ perpendiculaire à Ac. Cela posé, il est clair que MN est le sinus de l'angle bAc, M′N celui de l'angle $b'Ac$, et AN le cosinus de l'un et l'autre angle. Ainsi au même cosinus répondent deux sinus égaux, mais qui, étant posés en sens contraires, doivent être pris avec des signes contraires, comme nous l'avons établi dans l'algebre ; de sorte que si l'un est positif, l'autre sera nécessairement négatif. Or, si l'angle proposé BAC (Fig. 8), au lieu d'avoir pour projection l'angle bAc, avoit pour projection l'angle $b'Ac$, on trouveroit le cosinus et le sinus de ce dernier

Les quantités A, B, C, D, se déterminent par les données a, b, c, d, f.

Ainsi, pour avoir DB, il faut résoudre une équation du quatrieme degré, et pour avoir BC, il faut résoudre une équation du second degré.

Connoissant l'une ou l'autre de ces lignes, on trouvera facilement le lieu du point A; et par conséquent on pourra mener la corde BC. Car supposons, par exemple, qu'on connoisse DB : décrivez du point D pour centre avec le rayon DB un arc de cercle; menez par le point B, où cet arc coupera la circonférence du cercle proposé, la droite DBA; du point A au point E menez la droite ACE, qui rencontre la circonférence au point C, et tirez la corde BC : cette corde sera parallele à DE, puisque la valeur de la droite DB a été déduite de la supposition que BC fût en effet parallele à DE.

Si l'on connoissoit y seulement, on seroit aussi en état de fixer la position du point A; car on n'auroit qu'à prendre KH égale à la valeur trouvée pour y, élever par le point H, perpendiculairement à DE, la droite HB, qui rencontre la circonférence au point B, et mener par les points D et B la droite DBA. Le reste s'acheve comme tout-à-l'heure.

Je me contente d'indiquer la maniere de déterminer la position du point A, en supposant qu'on connoisse x ou y; mais je ne construis pas l'équation en x ou en y, parceque l'une ou l'autre équation est un peu composée, et que le problême peut se résoudre par une équation plus simple, que nous construirons comme on va le voir dans la solution suivante.

Solution II. Du point D (Fig. 11) menons la tangente DF au cercle X, et par le point B imaginons la tangente BN, qui rencontre en N la droite DE.

Cela posé, j'observe que les deux triangles DAE, DNB, sont semblables; car ils ont d'abord l'angle D commun; de plus l'angle DNB est égal à son alterne CBN; et celui-

ci, qui est formé par une corde et par une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc BZC, laquelle est aussi la mesure de l'angle BAC (Géom. 103). Ces deux triangles étant semblables, on aura la proportion, DE : DA :: DB : DN. Donc $DN = \frac{DA \times DB}{DE}$. Or, $DA \times DB = (DF)^2$. Donc $DN = \frac{(DF)^2}{DE}$. Ainsi, en nommant DE, a; DF, f; l'inconnue DN, z; on a $z = \frac{ff}{a}$, équation du premier degré, et on voit que la ligne cherchée DN est une troisieme proportionnelle aux deux lignes données DE, DF. La construction s'exécute ainsi d'une maniere fort simple.

Joignez (Fig. 12) les points E et F par la droite EF; portez DF de E en I; menez vers EF la droite IV parallele à DF; prenez DN égale à IV; le point N est celui qu'on demande. Car il résulte de cette construction qu'on aura, ED : DF :: EI ou DF : IV ou $DN = \frac{(DF)^2}{DE}$.

Comme on peut mener du point N deux tangentes NB, NB', au cercle X, il y a sur la circonférence deux points A et A', qui satisfont au problème. Ils se déterminent en menant par le point D et par chacun des points B et B' les droites DBA, DA'B'. En sorte que si par ces points A, A', on mene à l'autre extrémité E de la droite DE les droites ACE, C'A'E, et qu'on joigne les deux points B et C, ainsi que les deux points B' et C'; chacune des cordes BC, B'C', sera parallele à DE. Ce parallélisme a nécessairement lieu, puisque le point A ou le point A' n'a été déterminé que d'après la supposition que BC ou B'C' étoit en effet parallele à DE.

Remarque sur les deux solutions précédentes.

18. Des trois quantités z, y, x, la premiere est donnée par une équation du premier degré; la seconde par une équation du second degré; la troisieme par une

respondant $z = 8^\circ\ 58'\ 24''$ à-peu-près, et que par conséquent l'angle de projection $2z = 17^\circ\ 56'\ 48''$ à-peu-près.

17. Problème VI. *La droite* DE (Fig. 10) *étant donnée de grandeur et de position hors d'un cercle* X, *donné aussi de grandeur et de position, trouver sur la circonférence un point* A, *qui soit tel que, menant aux extrémités de la droite* DE *les droites* AD, AE, *qui rencontrent la circonférence aux points* B *et* C, *la corde* BC *soit parallele à* DE.

Je vais résoudre ce problème de deux manieres, pour montrer aux lecteurs l'avantage qu'il y a de regarder comme inconnues certaines lignes plutôt que d'autres, afin de parvenir à une équation finale qui soit la plus simple qu'il est possible. La même remarque sera confirmée dans la suite.

Solution I. Puisqu'on connoît la grandeur et la position de la droite DE et du cercle X; si du centre O nous abaissons la droite OK perpendiculaire à DE, que nous menions le rayon OB, qu'ensuite du point D nous menions la tangente DF au cercle : toutes les lignes DE, OB, OK, DK, DF, seront données. Mais les lignes DB, DA, BC, EC, EA, sont inconnues; et la question est de les déterminer, ou du moins de trouver les lignes nécessaires pour pouvoir remplir les conditions du problème. Nous allons prendre pour inconnues les deux lignes DB, BC, et tâcher de former deux équations qui expriment les relations de ces deux quantités avec les quantités données.

Supposons
$$\begin{cases} \text{DE} = a, \\ \text{OB} = b, \\ \text{OK} = c, \\ \text{DK} = d, \\ \text{DF} = f, \\ \text{DB} = x, \\ \text{BC} = 2y. \end{cases}$$

On a (Géom. 220) $DA \times DB = (DF)^2$; ce qui donne $DA = \frac{(DF)^2}{DB} = \frac{ff}{x}$. Donc $AB = DA - DB = \frac{ff}{x} - x = \frac{ff - xx}{x}$. Les triangles semblables ADE, ABC, donnent cette proportion, $AD\left(\frac{ff}{x}\right) : DE\,(a) :: AB\left(\frac{ff-xx}{x}\right) : BC\,(2y)$; d'où l'on tire l'équation,

$$\text{I. } 2y = \frac{a\,(ff - xx)}{ff}, \text{ ou } xx = ff - \frac{2ffy}{a}.$$

La droite OK, étant perpendiculaire à DE, est aussi perpendiculaire à BC, qui est supposée parallele à DE. Ainsi (Géom. 87) le point M est le milieu de BC. Donc, à cause du triangle rectangle OMB, on aura $OM = \surd[(OB)^2 - (BM)^2] = \surd[bb - yy]$; et $MK = OK - OM = c - \surd[bb - yy]$.

Du point B soit abaissée BH perpendiculaire à DE. On aura $BH = MK$, $DH = KH - KD = BM - KD = y - d$; et (à cause du triangle rectangle BHD), $(BD)^2 = (BH)^2 + (DH)^2$; ce qui donne l'équation $xx = (y-d)^2 + (c - \surd[bb - yy])^2$, ou bien (en développant les quarrés et effaçant les termes qui se détruisent), $xx = dd - 2dy + cc - 2c\surd[bb - yy] + bb$, ou bien encore $bb + cc + dd - 2dy - xx = 2c\surd[bb - yy]$. Faisant, pour abréger, $bb + cc + dd = gg$, et élevant tout au quarré pour faire disparoître le radical, on aura

$$\text{II. } g^4 - 4g^2dy + 4d^2y^2 - 2g^2x^2 + 4dx^2y + x^4 = 4b^2c^2 - 4c^2y^2.$$

Les deux équations I et II, étant combinées ensemble par la méthode qui a été expliquée dans l'algebre, produiront une équation où il n'entrera plus que l'une des deux inconnues x et y. Si l'on commence par éliminer y, on trouvera une équation de cette forme,

$$x^4 + Ax^2 + B = 0.$$

Et si on élimine x, on trouvera une équation de cette forme,

$$yy + Cy + D = 0.$$

tés de la ligne donnée fût moyenne proportionnelle entre cette ligne et la distance du point en question à l'autre extrémité de la ligne donnée; problème dont celui qui a été proposé n'est qu'un cas particulier, puisqu'on y suppose que le point cherché est placé sur la ligne même.

21. Problème VIII. *Trois points* A, B, C, (Fig. 14), *étant donnés sur une ligne, trouver sur cette ligne un quatrieme point* D, *tel que l'on ait*, AB : CD :: CD : AD.

Supposons
$$\begin{cases} \text{AB} \ldots\ldots\ldots = a, \\ \text{AC} \ldots\ldots\ldots = b, \\ \text{l'inconnue CD} \ldots\ldots\ldots = x, \\ \text{et par conséquent AD} = \text{AC} + \text{CD} = b + x. \end{cases}$$

Puisqu'on a la proportion AB (a) : CD (x) :: CD (x) : AD ($b+x$), on aura l'équation $ab + ax = xx$; d'où l'on tire

$$x = \frac{a}{2} \pm \surd\left[a\left(b + \frac{a}{4}\right)\right].$$

Ainsi l'inconnue a deux valeurs. Pour les construire, on prendra $\text{CM} = \frac{\text{AB}}{4}$, et ayant décrit sur AM, comme diametre un demi-cercle AKM, on élevera par le point B la droite BK perpendiculaire à AM, et on tirera la corde AK. Ensuite on prendra $\text{CD} = \text{AK} + \frac{\text{AB}}{2}$; et en sens contraire $\text{C}d = \text{AK} - \frac{\text{AB}}{2}$. Alors CD sera la premiere valeur de x, et Cd la seconde. En sorte qu'on aura les deux proportions AB : CD :: CD : AD, AB : Cd :: Cd : Ad.

Il est aisé de se convaincre qu'elles ont lieu effectivement, en mettant pour les lignes leurs valeurs algébriques, et faisant le produit des extrêmes et celui des moyens.

On voit que le problème a deux solutions, quoique dans l'énoncé on ne lui en ait attribué qu'une seule.

22. Problème IX. *Diviser un triangle* ABC (Fig. 15) *en deux parties* ADE, DBCE, *qui soient entre elles en raison donnée, par une droite* DE *parallele à la base* BC.

Du sommet A soit abaissée sur la base BC la perpendiculaire AH, qui rencontre en K la droite DE.

Supposons
- BC . . . . . $= a$,
- AH . . . . . $= h$,
- le rapport donné du triangle ADE au trapeze DBCE, c'est-à-dire $\frac{\text{ADE}}{\text{DBCE}}$ . . . . . $= \frac{m}{n}$,
- l'inconnue AK . . . . . $= x$.

La sécante DE étant parallele à BC, on a la proportion, AH (h): BC (a) :: AK (x) : DE $= \frac{ax}{h}$. Donc l'aire du triangle ADE $= \frac{axx}{2h}$, et l'aire du trapeze DBCE (différence des deux triangles ABC, ADE), $= \frac{ah}{2} - \frac{axx}{2h}$. Or, suivant les conditions du problème, on doit avoir $\frac{\text{ADE}}{\text{DBCE}} = \frac{m}{n}$. Donc on aura l'équation $\frac{ax^2}{ah^2 - ax^2} = \frac{m}{n}$; d'où l'on tire $x = \pm h\sqrt{\frac{m}{m+n}}$.

Ainsi l'inconnue a deux valeurs; mais ces deux valeurs sont égales, et ne different que par le signe. La premiere, qui est positive, sert pour le triangle proposé ABC; la seconde, qui est négative, se rapporte au triangle AB'C, égal et opposé par la pointe au triangle ABC. La construction que nous allons donner pour la premiere s'appliquera à la seconde, en observant que les lignes du second triangle, correspondantes à celles du premier, sont marquées par les mêmes lettres accentuées.

Sur la hauteur AH, comme diametre, décrivez un demi-cercle AFH; divisez (Géom. 150) la droite AH en deux parties AZ, ZH, qui soient entre elles dans le rapport de m à n, et par le point Z menez au diametre AH l'ordonnée ZF; tirez la corde AF; portez AF de A en K: le point K sera celui qu'on cherche. En sorte que, menant par ce point la

équation du quatrieme degré. Voici la relation de ces quantités.

1°. On n'a besoin que du seul point N ou de la droite DN pour pouvoir mener les deux tangentes égales NB, NB', qui déterminent les deux points A et A', et conséquemment les deux cordes BC, B'C'. Or l'inconnue $2y$ doit représenter indifféremment la corde BC ou la corde B'C', puisque ces deux cordes sont tirées suivant la même loi. Donc à un même z doivent répondre deux y, ou, ce qui revient au même, à l'équation du premier degré, qui donne z, doit répondre une équation du second degré pour y.

2°. Dans la premiere solution, nous avons trouvé $xx = ff - \frac{2ffy}{a}$. Cette équation donne $x = \pm f\sqrt{\frac{a-2y}{a}}$; d'où l'on voit qu'à cause du double signe $\pm$, à chaque valeur de y répondent deux x égales, l'une positive, l'autre négative. Il y a donc quatre x pour deux y; et si l'on prolonge BD ou B'D vers a ou a', qu'on imagine le cercle posé en X' dans la même situation, la droite DE en DE': alors les quatre valeurs de x seront représentées par les quatre lignes DB, DB', Db, Db', qui sont égales deux à deux, et posées en sens contraires, aussi deux à deux.

19. Problème VII. *Couper une ligne* AB (Fig. 13) *en moyenne et extrême raison.*

Supposons que AC représente la partie qui doit être moyenne proportionnelle entre la ligne entiere et l'autre partie, et nommons AB, a; AC, x; nous aurons CB $= a - x$. Or, puisqu'on doit avoir AB (a) : AC (x) :: AC (x) : CB $(a-x)$, on aura l'équation $aa - ax = xx$; d'où l'on tire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{[aa + \frac{aa}{4}]}.$$

Ainsi l'inconnue a deux valeurs qu'il s'agit de construire. Or, pour avoir d'abord la premiere, à l'extrémité de B de droite AB, j'éleve la perpendiculaire BD $= \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, et je

tire l'hypoténuse AD, dont la valeur est $\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}$. Donc, en retranchant de DA la partie $DM=\frac{a}{2}$, le reste AM sera la valeur cherchée, puisque $AM=AD-DM=\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}-\frac{a}{2}$. Portant donc AM de A en C, la ligne AB sera divisée en moyenne et extrême raison au point C.

La seconde valeur de x, c'est-à-dire $-\frac{a}{2}-\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}$, se construit en observant que si on prend $DK=DB=\frac{a}{2}$, on aura $AK=AD+DK=\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}+\frac{a}{2}$, quantité positive et contraire à celle que nous cherchons. Or, comme les quantités négatives doivent toujours être prises en sens contraires des quantités positives, il s'ensuit que si on prolonge KA vers M', en sorte que AM'=AK, que sur BA prolongée vers C', on prenne AC'=AM', le point C' sera celui qu'on cherche. De sorte qu'on aura la proportion, AB : AC' :: AC' : C'B. En effet, si l'on prend les grandeurs absolues des lignes AB, AC', C'B, abstraction faite de leur position qui n'entre pour rien dans leurs rapports, on a $AB=a$, $AC'=\frac{a}{2}+\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}$, $C'B=a+\frac{a}{2}+\sqrt{[aa+\frac{aa}{4}]}$; et par conséquent $AB\times C'B=(AC')^2$, comme on peut s'en convaincre en mettant pour les lignes leurs valeurs analytiques, et effectuant les multiplications indiquées.

20. *Remarque.* Il n'y a, à proprement parler, que le point C qui résolve le problème proposé; mais l'algebre donne, par un même calcul, non seulement la solution de la question particuliere qu'on lui demande, mais en général la solution de toutes les questions de même nature. Ainsi, dans le cas présent, l'équation $aa-ax=xx$ résout le problème général où il s'agiroit de trouver sur une ligne ou sur son prolongement un point dont la distance à l'une des extrémi-

Sol. I. Soient $\begin{cases} \text{AD} \ldots\ldots\ldots\ldots = a, \\ \text{AB} + \text{AC} \ldots\ldots\ldots = b, \\ \text{AB} \ldots\ldots\ldots\ldots = x, \\ \text{et par conséquent AC} \ldots = b - x. \end{cases}$

A cause du triangle rectangle BAC, qui donne $(\text{BC})^2 = (\text{AB})^2 + (\text{AC})^2$, on aura, $(\text{BC})^2 = xx + (b-x)^2 = 2xx - 2bx + bb$.

D'un autre côté, à cause des triangles rectangles semblables BDA, BAC, on a, $\text{AD}\,(a) : \text{AB}\,(x) :: \text{AC}\,(b-x) : \text{BC} = \frac{bx - xx}{a}$. Donc $(\text{BC})^2 = \frac{b^2x^2 - 2bx^3 + x^4}{a^2}$. Egalant entre elles les deux valeurs de $(\text{BC})^2$, et ordonnant l'équation par rapport à x, on trouvera,

$$x^4 - 2bx^3 + b^2 - 2a^2 \Big\} x^2 + 2a^2 bx - a^2 b^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrieme degré : mais elle peut s'abaisser au second ; car on s'apperçoit, avec un peu d'attention, que si on ajoute de part et d'autre $a^2b^2 + a^4$, c'est-à-dire si on écrit

$$x^4 - 2bx^3 + b^2 - 2a^2 \Big\} x^2 + 2a^2 bx + a^4 = a^2 b^2 + a^4,$$

le premier membre est un quarré parfait, celui de $xx - bx - aa$. Ainsi, en tirant la racine quarrée de l'équation précédente, on aura, $xx - bx - aa = \pm\sqrt{[a^2b^2 + a^4]}$; ou bien (en représentant, pour abréger, la quantité radicale par ac), $xx - bx - aa = \pm ac$; d'où l'on tire

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left[aa + \frac{bb}{4} \pm ac\right]}.$$

Cela posé, j'observe d'abord que, relativement à la question proposée, on ne peut pas prendre avec le signe + le terme ac qui est sous le signe radical ; car alors la quantité radicale seroit plus grande que $\frac{b}{2}$. D'où il suit que si des deux signes qui précedent le signe radical on prenoit le signe +, la valeur de x seroit plus grande que b, ce qui ne peut pas être ; et que si on prenoit le signe —, la valeur de x seroit négative, et que par conséquent la valeur de AC, qui est

$b - x$, seroit plus grande que b, ce qui ne peut pas être non plus.

Supposons donc que ac soit précédé du signe —, ou qu'on ait $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{[aa + \frac{bb}{4} - ac]}$.

Il pourra arriver que la quantité radicale soit imaginaire, ou réelle. Elle sera imaginaire, si l'on a $ac > aa + \frac{bb}{4}$, ou $a^2 b^2 + a^4 > (aa + \frac{bb}{4})^2$, ou $a^2 > \frac{b^2}{8}$: alors le problème est impossible. Elle sera réelle si $a = \frac{b^2}{8}$, et alors $AC = AB = \frac{b}{2}$: elle sera encore réelle si $a^2 < \frac{b^2}{8}$.

Dans ce dernier cas, la quantité radicale $\sqrt{(aa + \frac{bb}{4} - ac)}$ est toujours moindre que $\frac{b}{2}$. Car on a, $\frac{b}{2} > \sqrt{(aa + \frac{bb}{4} - ac)}$, ou $\frac{b^2}{4} > aa + \frac{bb}{4} - ac$, ou $ac > aa$, ou $c > a$, ou $aa + bb > aa$. Donc, si, dans l'équation $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(aa + \frac{bb}{4} - ac)}$, on prend le radical avec le signe +, la valeur de x sera positive et plus grande que $\frac{b}{2}$, mais moindre que b ; et si l'on prend le radical avec le signe —, la valeur de x sera encore positive, mais moindre que $\frac{b}{2}$.

Pour savoir si ces deux valeurs de x sont admissibles dans le cas présent, il faut considérer que l'hypoténuse de tout triangle rectangle étant plus grande que chacun des deux autres côtés, on doit avoir $AB > AD$, ou $x > a$. Or on a $\frac{b}{2} \pm \sqrt{[aa + \frac{bb}{4} - ac]} > a$, ou $\frac{b}{2} - a > \pm \sqrt{[aa + \frac{bb}{4} - ac]}$, ou $(\frac{b}{2} - a)^2 > aa + \frac{bb}{4} - ac$, ou $-ab > -ac$, ou $c > b$, ou $\sqrt{(aa + bb)} > b$. Donc les deux valeurs de x sont admissibles, et chacune d'elles résout le problème proposé. En voici la construction.

D'abord la quantité c, qui a pour valeur $\sqrt{(aa + bb)}$,

droite DE parallele à BC, le triangle ADE et le trapeze DBCE seront entre eux dans la raison de m à n, ce qui est évident.

23. Problême X. *Connoissant* (Fig. 16) *l'hypoténuse* BC *et la somme* AB + AC + AD *des deux côtés* AB, AC, *et de la hauteur* AD *d'un triangle rectangle, déterminer ce triangle, c'est-à-dire ses côtés et ses angles inconnus.*

Supposons
$$\begin{cases} \text{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots = a, \\ \text{AB} + \text{AC} + \text{AD} \ldots\ldots\ldots = b, \\ \text{AD} \ldots\ldots\ldots\ldots = x, \\ \text{AB} \ldots\ldots\ldots\ldots = y, \\ \text{et par conséquent} \ldots \text{AC} = b - x - y. \end{cases}$$

Le triangle rectangle BAC donne $(\text{BC})^2 = (\text{AB})^2 + (\text{AC})^2$, c'est-à-dire, en termes algébriques, $aa = yy + (b-x-y)^2$, ou bien

I. $aa = 2yy + bb + 2bx + xx - 2by + 2xy$.

De plus, à cause des triangles rectangles semblables BAC, BDA, on a, $\text{BC}(a) : \text{BA}(y) :: \text{AC}(b-x-y) : \text{AD}(x)$. D'où l'on tire $ax = by - xy - yy$, ou bien, en multipliant tout par 2,

II. $2ax = 2by - 2xy - 2yy$.

Ajoutant ensemble les deux équations I et II, et effaçant les termes qui se détruisent, on aura $aa + 2ax = bb - 2bx + xx$; d'où l'on tire $x = a + b \pm \sqrt{(2aa + 2ab)}$.

Des deux valeurs de x, il n'y a que la seconde, c'est-à-dire $x = a + b - \sqrt{(2aa + 2ab)}$ qui puisse satisfaire au problême proposé; car il est évident que la hauteur AD du triangle BAC doit être moindre que $a + b$; et pour avoir cette valeur, il ne s'agit que de retrancher de la somme $a + b$ une moyenne proportionnelle entre $2a$ et $a + b$. Ensuite, ayant décrit sur BC comme diametre un demi-cercle, et ayant élevé au point B la perpendiculaire BN, égale à la valeur qu'on vient de trouver pour x, on menera parallèlement à BC la droite NA, qui rencontre la demi-circonfé-

rence au point A, duquel on tirera les cordes AB, AC; ce qui déterminera le triangle cherché BAC.

24. *Remarque.* Le problême proposé n'est qu'un cas particulier de cette question générale : *Etant données les deux lignes* BC (a), BM (b) (Fig. 17), *trouver une ligne* x *telle que la différence des quarrés des deux lignes* b *et* a *soit égale à la différence qu'il y a entre le produit de leur somme par le double de l'inconnue et le quarré de cette inconnue ;* car la traduction algébrique de cet énoncé est l'équation $bb - aa = (a + b) \times 2x - xx$; d'où l'on tire le même résultat que ci-dessus, $x = a + b \pm \sqrt{[2aa + 2ab]}$.

Or il y a sur la ligne BM deux points N′ et N qui satisfont à cette équation. Car supposons, par exemple, BC = 2 pieds, BM = 7 pieds ; on aura, en prenant le signe supérieur du radical, BN′ = 15 pieds, et en prenant le signe inférieur, BN = 3 pieds. Ces deux valeurs satisfont également à l'équation proposée, puisqu'on a, $49 - 4 = (7 + 2) \times 30 - 225$, et $49 - 4 = (7 + 2) \times 6 - 9$. Mais de ces deux valeurs il n'y a que la seconde BN qui puisse résoudre le problême précédent, parceque, suivant les conditions de ce problême, les lignes données doivent avoir dans l'espace une disposition particuliere, et telle qu'il en résulte un triangle rectangle, dont la hauteur BN ou AD, est nécessairement moindre que l'hypoténuse BC, et à plus forte raison que la quantité BC + BM.

On voit par là que, lorsqu'on est arrivé à l'équation finale d'un problême, il faut examiner par la nature de ce problême les racines qui servent à le résoudre, et regarder les autres comme inutiles, du moins par rapport à l'objet proposé. Quelquefois un problême a plusieurs solutions, quelquefois il n'en a qu'une seule. C'est ce qu'on reconnoît par l'analyse de ses conditions.

25. Problême XI. *Connoissant la somme des côtés* AB, AC, *et la hauteur* AD *du triangle* BAC (Fig. 18), *rectangle en* A, *déterminer ce triangle.*

est l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés contigus à l'angle droit les lignes a et b. Cette hypoténuse étant trouvée, cherchez une moyenne proportionnelle d entre a et c. Alors la quantité radicale deviendra $\sqrt{[aa+\frac{bb}{4}-dd]}$; et on en trouvera l'expression, en construisant d'abord un triangle rectangle qui ait pour côtés contigus à l'angle droit les lignes a et $\frac{b}{2}$, et un second triangle rectangle qui ait même hypoténuse que le précédent, et d pour l'un de ses côtés; l'autre côté, que je nomme f, sera la valeur de la quantité radicale. Toutes ces opérations s'exécutent par les articles 187, 194, de la géométrie. Par-là on aura $x=\frac{b}{2}\pm f$.

Cela posé, ayant mené (Fig. 19) les deux lignes AB, AC, perpendiculaires entre elles, je prends sur la premiere, $AO=\frac{b}{2}$, et de part et d'autre du point O chacune des lignes OB, OB′, égale à f; ce qui donne, $AB=\frac{b}{2}-f$, $AB'=\frac{b}{2}+f$. Sur AB et AB′, comme diametres, je décris les deux cercles AMBD, AM′B′D′; et du point A comme centre, avec le rayon $AD=a$, je décris un arc de cercle, qui coupe les deux cercles dont on vient de parler, aux points D et D′; par les points B et D, et par les points B′ et D′, je mene les droites BDC, B′D′C′: les deux triangles rectangles BAC, B′AC′, qui ont chacun pour hauteur la ligne a, satisfont l'un et l'autre au problême proposé.

Solution II. Représentons toujours par a la hauteur donnée AD du triangle proposé (Fig. 18), et par b la somme donnée des deux côtés AB, AC. Mais, au lieu de chercher, comme dans la solution précédente, le côté AB, cherchons l'hypoténuse BC.

En nommant AB, x; BC, y; et procédant comme ci-dessus, c'est-à-dire cherchant deux valeurs de $(BC)^2$, nous parviendrons aux deux équations,

I. $yy = 2xx - 2bx + bb$,

II. $y = \frac{bx - xx}{a}$, ou $2ay = 2bx - 2xx$,

lesquelles étant ajoutées ensemble donnent $yy + 2ay = bb$; d'où l'on tire, $y = -a \pm \sqrt{[bb + aa]}$.

Dans cette expression on ne peut prendre que le signe supérieur du radical ; car, si on prenoit le signe inférieur, ou qu'on eût $y = -[a + \sqrt{(bb + aa)}]$, la valeur de l'hypoténuse seroit une ligne négative plus grande que b, ce qui est impossible.

Quant à la construction de y, elle est toute simple ; car si l'on fait un triangle rectangle qui ait pour côtés contigus à l'angle droit les lignes a et b, et qu'on nomme g son hypoténuse ; on aura, $y = g - a$.

26. *Remarque I.* On voit, par l'une et l'autre solution, que toutes les racines de l'équation finale, même celles qui sont réelles, ne peuvent pas être employées dans le problème proposé. Il faut raisonner, par rapport à cette équation prise dans toute sa généralité, comme on a fait par rapport à une équation analogue (24).

27. *Remarque II.* Suivant la premiere solution, il y a deux triangles BAC, B'AC' (Fig. 19), qui satisfont au problème proposé, tandis que, suivant la seconde, l'hypoténuse n'a qu'une valeur, ce qui paroît devoir ne donner qu'un seul triangle. Mais, pour lever cette contradiction apparente, il faut remarquer que les deux triangles BAC, B'AC', de la premiere solution sont parfaitement égaux, et ont par conséquent des hypoténuses égales. Car, si vous prenez $AB = \frac{b}{2} - f$, vous aurez $AC = b - AB = \frac{b}{2} + f$; et si vous prenez $AB' = \frac{b}{2} + f$, vous aurez $AC' = b - AB' = \frac{b}{2} - f$. D'où il suit que les deux triangles BAC, B'AC', ont un angle A compris entre côtés égaux chacun à chacun, et sont par conséquent parfaitement égaux.

28. Problème XII. *Mener par l'angle* A (Fig. 20) *d'un quarré* ABCD *une droite* AF, *telle qu'en prolongeant le côté* DC, *la partie* EF *soit égale à une ligne donnée* b.

Imaginons que du point F on mene perpendiculairement à AF la droite FM, qui rencontre en M le prolongement de AB; et la droite FO perpendiculaire à AM. Nommons a l'un des côtés du quarré donné ABCD; et les inconnues BM, x; FM, y.

Cela posé, les deux triangles rectangles FOM, ABE, ayant tous les angles égaux chacun à chacun, et les côtés FO, AB, égaux, sont parfaitement égaux. Donc $AE = FM = y$; et par conséquent $AF = AE + EF = y + b$. Et comme le triangle rectangle AFM donne $(AM)^2 = (AF)^2 + (FM)^2$, on aura $(a + x)^2 = (y + b)^2 + yy$, ou bien,

I. $aa + 2ax + xx = 2yy + 2by + bb$.

De plus les triangles rectangles semblables ABE, AFM, donnent AB (a) : AE (y) :: AF $(y + b)$: AM $(a + x)$, et par conséquent $aa + ax = yy + by$, ou bien, en multipliant tout par 2,

II. $2aa + 2ax = 2yy + 2by$.

Retranchant l'équation II de l'équation I, on aura $xx - aa = bb$, ou $xx = aa + bb$; ce qui donne ..... $x = \pm\sqrt{(aa + bb)}$, et la construction suivante.

Prenez une ligne BM (Fig. 21) égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés contigus à l'angle droit les lignes données a et b. Sur AM, comme diametre, décrivez un demi-cercle AHM, qui coupera la droite DC aux points F, F′, qui satisfont l'un et l'autre au problème; en sorte que, menant les droites AEF, AF′E′, on a, EF ou E′F′ $= b$. Ces deux lignes EF, E′F′, répondent à la racine positive $x = +\sqrt{(aa + bb)}$. Car, suivant la solution précédente, la droite AM, qui a pour valeur AB $+ x$, ou $a + \sqrt{(aa + bb)}$, doit être l'hypoténuse d'un triangle qui a le sommet de l'angle droit placé sur la droite DCF; d'où il suit que ce sommet est l'un ou l'autre des deux points d'intersection de DCF avec la demi-circonférence AHM. Ainsi chacun des deux triangles rectan-

gles AFM, AF'M, parfaitement égaux, satisfait à cette condition ; et chacune des deux lignes EF, E'F', est nécessairement égale à b.

Si on veut avoir la construction qui se rapporte à la racine négative $x = -\sqrt{(aa+bb)}$, on prendra, à gauche de B, la droite $BM' = BM$; sur AM' comme diametre on décrira un demi-cercle AH'M' ; on prolongera CD vers Z ; par les points d'intersection f, f', de cette ligne avec la demi-circonférence AH'M', et par le point A, on menera les droites fAe, $f'Ae'$, terminées par le prolongement de CB : ces lignes répondront à la racine négative $x = -\sqrt{(aa+bb)}$. Car si, au lieu de supposer dans la solution précédente que la droite donnée b, qui doit toujours passer par le point A, et se terminer aux droites E'e', FZ, tombe dans l'angle BAD, on suppose qu'elle tombe hors de cet angle, et qu'elle soit fAe ou $f'Ae'$; alors, en prenant B'M pour inconnue, et imaginant que du point M' on ait mené M'f ou M'f' perpendiculaire à fAe ou $f'Ae'$, on voit que AM', qui a pour valeur BM'—AB, ou BM — AB, ou $\sqrt{(aa+bb)} - a$, doit être l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a le sommet de l'angle droit placé sur la droite CDZ. Ainsi ce sommet est l'un ou l'autre point f ou f', intersection de la droite CDZ avec la demi-circonférence AH'M' ; et chacune des lignes fAe, $f'Ae'$, est encore égale à b.

29. *Remarque.* On voit qu'en général le problème a quatre solutions. En effet, aux deux valeurs de x répondent quatre valeurs de y, savoir AE, AE', Ae, Ae'. Car, puisqu'on a trouvé $aa + ax = yy + by$, on aura, en mettant successivement pour x ses deux valeurs, et dégageant y,

$$y = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + aa + a\sqrt{(aa+bb)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + aa + a\sqrt{(aa+bb)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + aa - a\sqrt{(aa+bb)}\right]},$$

$$y = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + aa - a\sqrt{(aa+bb)}\right]}.$$

Les deux premieres valeurs de y sont toujours réelles; mais les deux autres peuvent être imaginaires, et elles le sont toujours en même temps. Cela arrive lorsque la quantité $\frac{bb}{4} + aa$ est moindre que la quantité $a\sqrt{(aa+bb)}$, ou lorsqu'on a $bb < 8aa$. Alors le demi-cercle AH'M' tombe tout entier au-dessous de CZ, et les points d'intersection f et f' de CZ avec la demi-circonférence AH'M' deviennent imaginaires; car, puisqu'on a $bb < 8aa$, il est clair que le rayon TH', qui a pour valeur $\frac{\sqrt{(aa+bb)} - a}{2}$, est moindre que a.

Si on avoit $\frac{bb}{4} + aa = a\sqrt{(aa+bb)}$, les deux dernieres valeurs de y seroient égales, et les deux points f et f' viendroient se confondre en un seul et même point H' où la droite CZ toucheroit la demi-circonférence AH'M'.

3o. Problême XIII. *Déterminer toutes les dimensions d'un triangle* ABC (Fig. 22), *en supposant que l'on connoisse sa hauteur* BD, *et les rayons* OA, VH, *de deux cercles, dont l'un lui est circonscrit, et l'autre lui est inscrit.*

Du centre V du cercle inscrit je mene aux points d'attouchement de ce cercle, avec les côtés AC, AB, BC, du triangle, les rayons VR, VM, VH, lesquels sont perpendiculaires à ces côtés; par le même point V et par le sommet B du triangle, je mene la droite BVZ, qui rencontre en Z la circonférence du cercle circonscrit; enfin je tire le rayon OZ et la corde CZ.

Nommons
- la hauteur BD . . . . . a,
- le rayon VR du cercle inscrit. . . . . b,
- le rayon OZ du cercle circonscrit . . . c,
- la base AC du triangle. . . . . x,
- BH. . . . . y.

On aura d'abord $\frac{ax}{2}$ pour la valeur de l'aire du triangle ABC.

D'un autre côté cette même aire a pour expreession (Géom. 230) la moitié du produit du périmetre du triangle par le rayon du cercle inscrit, c'est-à-dire $\frac{(AC+AB+BC)\times VR}{2}$. Or, à cause de BM = BH, de AR = AM, de CR = CH, on aura AC + AB + BC, ou AC + AM + MB + BH + HC = AC + AR + BH + BH + CR = 2AC + 2BH = $2x + 2y$. Donc $\frac{(AC+AB+BC)\times VR}{2}$ = $bx + by$. Egalant entre elles les deux valeurs de l'aire du triangle, on aura l'équation

$$\text{I.}\quad \frac{ax}{2} = bx + by, \text{ ou } ax = 2bx + 2by.$$

L'angle ABC étant divisé en deux parties égales par la droite BZ, le point Z est le milieu de l'arc AZC, et le rayon OZ est perpendiculaire sur le milieu de la corde AC. Donc CQ ou $AQ = \frac{x}{2}$, $QO = \sqrt{(cc - \frac{xx}{4})}$, $QZ = OZ - OQ = c - \sqrt{(cc - \frac{xx}{4})}$. Les triangles rectangles semblables BHV, CQZ, donnent $QZ\,[c - \sqrt{(cc - \frac{xx}{4})}] : CQ(\frac{x}{2}) :: VH\,(b) : BH\,(y)$; d'où l'on tire l'équation,

$$\text{II.}\quad cy - y\sqrt{(cc - \frac{xx}{4})} = \frac{bx}{2}.$$

Si dans cette équation on met pour y sa valeur $\frac{ax - 2bx}{2b}$ donnée par l'équation I, on aura

$$(ax - 2bx) \times [c - \sqrt{(cc - \frac{xx}{4})}] = bx;$$

ce qui donne $x = \pm \frac{2b\sqrt{(2ac - 4bc - bb)}}{a - 2b}$,

et conséquemment $y = \pm\sqrt{(2ac - 4bc - bb)}$.

La base x du triangle étant connue, nous pouvons le construire de la maniere suivante.

Ayant pris sur le diametre AM (Fig. 23) du grand cercle la partie $AF = a - 2b$, et ayant élevé au point F la perpendiculaire FI, soit tirée la corde AI, sur laquelle, comme diametre, on décrira le demi-cercle AFI. Soit inscrite dans ce

demi-cercle la corde IL $= b$, et soit tirée la corde LA, qu'on prolongera indéfiniment vers K. Si on joint les points L et F par la droite LF, et si, ayant pris AP $= 2b$, on mene par le point P la droite PK parallele à FL, on aura AK $= x = \frac{2b\sqrt{(2ac-4bc-bb)}}{a-2b}$. Car AI étant moyenne proportionnelle entre AM $(2c)$ et AF $(a-2b)$, on a $(AI)^2 = 2ac-4bc$; et, à cause du triangle rectangle ALI, $AL = \sqrt{[(AI)^2-(IL)^2]} = \sqrt{(2ac-4bc-bb)}$. Or, à cause des paralleles FL, PK, on a la proportion, $AF(a-2b) : AL[\sqrt{(2ac-4bc-bb)}] :: AP(2b) : AK = \frac{2b\sqrt{(2ac-4bc-bb)}}{a-2b}$. Ainsi AK est égale à la base du triangle ; et par conséquent, en inscrivant dans le grand cercle la corde AC égale à AK, nous aurons la base AC de notre triangle. Par un point quelconque C de cette base soit élevée une perpendiculaire $CS = a$; et par le point S soit menée parallèlement à CA la droite SB'B, qui rencontrera la circonférence du grand cercle aux points B et B', qu'on pourra prendre chacun indifféremment pour le sommet du triangle cherché ABC ou AB'C. Ces deux triangles, qui sont parfaitement égaux, satisfont l'un et l'autre aux valeurs positives de x et de y. La construction est la même pour les valeurs négatives, qui ne different des positives que par la situation respective des lignes.

Je n'ai pas besoin de faire observer, puisque nos équations le disent assez, que le problême seroit impossible si on avoit $2ac < 4bc+bb$.

31. *Remarque I.* Quoique la construction précédente ne soit pas fort composée, on peut en donner une autre qui est bien plus simple. Pour cela, observons qu'à cause de $QZ = c-\sqrt{(cc-\frac{xx}{4})}$, et de l'équation $(\frac{ax-2bx}{2b}) \times \left(c-\sqrt{(cc-\frac{xx}{4})}\right) = \frac{bx}{2}$, on a $QZ = \frac{b^2}{a-2b}$.

Par où l'on voit que la valeur de QZ est une troisieme proportionnelle aux lignes $a-2b$ et b. Cette valeur étant déterminée (Géom. 157), menez du centre C du grand cercle le

rayon CZ à un point Z choisi arbitrairement sur la circonférence ; prenez sur ce rayon la partie ZQ = la valeur qu'on a trouvée pour cette partie ; élevez par le point Q, sur CZ, la perpendiculaire AC, qui, étant prolongée de part et d'autre, donne la base AC du triangle. Le reste de la construction s'acheve comme ci-dessus.

On voit par-là qu'il est avantageux d'examiner et de choisir pour base de la construction la ligne qui mene au but par le chemin le plus court.

32. *Remarque II.* Il est encore plus important de bien choisir l'inconnue qui doit servir de base au calcul. Si on avoit pris pour inconnue le segment AD, ou quelque autre ligne analogue, l'équation finale auroit été d'un degré plus élevée. Car soit (Fig. 22) l'inconnue $AD = z$, et gardons les mêmes dénominations que ci-dessus. Du centre O du cercle circonscrit menons ON perpendiculaire à AB : on aura $AN = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(aa+zz)}}{2}$, $ON = \sqrt{[(OA)^2 - (AN)^2]} = \frac{\sqrt{(4cc-aa-zz)}}{2}$, $CD = AC - AD = x - z$. Cela posé, les triangles rectangles semblables CDB, ONA, donnent, $CD\ (x-z) : DB\ (a) :: ON\ [\frac{\sqrt{(4cc-aa-zz)}}{2}] : AN\ [\frac{\sqrt{(aa+zz)}}{2}]$. D'où l'on tire, en quarrant chaque terme, faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, et ordonnant l'équation par rapport à z,

$$\left.\begin{matrix} z^4 - 2xz^3 + 2aa \\ + xx \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} z^2 - 2a^2xz + a^2x^2 \\ + a^4 \\ + 4a^2c^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

On voit qu'à un même x répondent quatre z. En effet (Fig. 23) l'inconnue z peut représenter également le segment DA, ou le segment DC, ou le segment D'A, ou le segment D'C ; car, quel que soit celui de ces segments qu'on prenne pour inconnue, cette inconnue se combinera toujours de la même maniere avec les quantités données, et on parviendra toujours à la même équation finale.

33. *Remarque III.* De là nous tirons cette regle générale pour parvenir à des équations qui soient les plus simples qu'il est possible. Si dans une question géométrique il se trouve deux quantités inconnues, qui aient avec les quantités données une relation telle qu'en prenant l'une ou l'autre pour inconnue, l'équation finale soit de la même espece ; ou si, en faisant entrer ces deux quantités dans le calcul, les termes où elles se trouvent sont semblables, à quelques différences près dans les signes qui les précedent ; alors il ne faut prendre pour inconnue ni l'une ni l'autre quantité, mais il faut choisir pour inconnue une autre quantité qui s'y rapporte semblablement. Voilà pourquoi, dans l'exemple précédent, au lieu de prendre pour inconnue l'un des segments de la base, il convient plutôt de prendre pour inconnue la base AC, qui se rapporte semblablement à ces segments. Nous avons fait usage de cette regle dans quelques uns des problémes que nous venons de résoudre, et on en reconnoîtra également l'utilité dans ceux qu'on pourra se proposer.

34. *Scholie.* Les problémes précédents me paroissent suffire pour mettre un lecteur intelligent en état de s'exercer sur d'autres questions de même nature. D'ailleurs on trouvera encore dans la suite de ce traité différentes applications de l'algebre à la géométrie, lesquelles feront connoître de plus en plus l'esprit et le choix des moyens qu'on doit employer pour allier ces deux sciences. Je finis par donner ici la construction générale des équations des deux premiers degrés. L'ordre sembloit demander que je commençasse par expliquer la maniere de construire les équations avant que de donner des problémes, puisqu'on ne peut tirer aucune expression géométrique de l'équation finale d'un problème si on ne sait pas la construire. Mais je n'ai pas voulu débuter par des regles générales, qu'on a toujours de la peine à concevoir distinctement si elles ne sont accompagnées de quelques applications, et j'ai préféré de donner des constructions particulieres à la suite de chaque problème particulier. Maintenant qu'on voit clairement le but des constructions, voici

en peu de mots la méthode de construire en général les équations des deux premiers degrés, ou, ce qui revient au même, les quantités rationnelles et les radicaux du second degré.

Construction générale des équations du premier degré.

35. Qu'on ait d'abord à construire l'équation $x = \frac{ab}{c}$, on cherchera une quatrieme proportionnelle aux trois lignes c, a, b.

Qu'on ait $x = \frac{abe}{cd}$: on cherchera, comme dans l'exemple précédent, la valeur de $\frac{ab}{c}$. Nommons f cette valeur; il s'agira de construire $\frac{fe}{d}$; ce qui se fera en cherchant une quatrieme proportionnelle aux trois lignes d, f, e.

Ainsi de suite, si les termes de la fraction avoient un plus grand nombre de dimensions.

Si la valeur de l'inconnue étoit composée de plusieurs fractions; par exemple, si on avoit $x = \frac{ab}{c} + \frac{fgh}{lm} - \frac{mnpq}{rst}$, on chercheroit successivement les valeurs de toutes ces fractions, et on les joindroit ensemble avec les signes convenables: cet assemblage seroit la valeur de x.

36. Les mêmes moyens servent à transformer un rectangle en un autre dont un côté soit donné, un solide en un autre dont deux côtés soient donnés, un produit de quatre dimensions en un autre dont trois dimensions soient données, etc. Car soit, par exemple, le quarré bb qu'on veut transformer en un rectangle qui ait la lettre arbitraire a pour l'un de ses côtés: je divise bb par a, ce qui donne pour quotient $\frac{bb}{a}$; et je cherche par la méthode précédente une ligne égale à $\frac{bb}{a}$. Nommons m cette ligne, nous aurons $\frac{bb}{a} = m$, et par conséquent $bb = am$.

Si on avoit ffc à transformer, de maniere que le nouveau solide contînt ab, on chercheroit une ligne n égale à $\frac{ffc}{ab}$, et l'on auroit $\frac{ffc}{ab} = n$, et par conséquent $ffc = nab$. etc.

37. Supposons maintenant qu'on ait à construire une fraction dont le dénominateur soit complexe, on s'y prendra comme dans les exemples suivants.

Soit $x = \frac{a^3}{bb+cc}$: je transforme l'un des termes du dénominateur, par exemple cc, en un autre qui contienne la lettre b, en sorte qu'on ait $cc = bm$, et par conséquent $x = \frac{a^3}{bb+bm} = \frac{a^2}{b} \times \frac{a}{b+m}$. Je cherche la valeur du facteur $\frac{a^2}{b}$, et je la nomme n; ce qui donne $x = \frac{na}{b+m}$; et considérant $b+m$ comme une seule ligne, je cherche une quatrieme proportionnelle à cette ligne et aux deux lignes n et a: cette quatrieme proportionnelle est la valeur de x.

38. Soit $x = \frac{f^3 c}{a^3+b^3}$: je transforme le terme b^3 du dénominateur en un autre aan, ce qui donne $x = \frac{f^3 c}{a^3+aan} = \frac{f^2}{a} \times \frac{f}{a} \times \frac{c}{a+n}$. Je cherche la valeur de $\frac{f^2}{a}$, et je la nomme m; je cherche la valeur de $\frac{mf}{a}$, et je la nomme p; enfin je cherche la valeur de $\frac{pc}{a+n}$, et c'est celle de x.

39. Soit $x = \frac{bcd}{gg+hk+lm}$: on fera $hk = gn$, $lm = gq$, ce qui donne $x = \frac{bcd}{gg+gn+gq} = \frac{bc}{g} \times \frac{d}{g+n+q}$. Alors il ne s'agit plus que de chercher d'abord une quatrieme proportionnelle (que je nomme p) aux trois lignes représentées par g, b, c; et ensuite une quatrieme propor-

tionnelle aux trois lignes représentées par $g+n+q$, p, d.

On opérera d'une maniere semblable pour les cas où le dénominateur de la fraction contiendroit un plus grand nombre de termes, quelles que soient d'ailleurs les dimensions de ces termes.

40. Si le numérateur de la fraction étoit complexe; par exemple si on avoit $x = \frac{a^3+bcd-fgh}{pq+hk+rs}$, on écriroit ainsi cette quantité, $x = \frac{a^3}{pq+hk+rs} + \frac{bcd}{pq+hk+rs} - \frac{fgh}{pq+hk+rs}$. Alors il ne s'agit plus que de construire, comme on vient de l'expliquer, toutes les parties de cette quantité, et d'assembler leurs valeurs avec les signes qui précedent les termes du numérateur de la fraction proposée.

41. Si la valeur de l'inconnue est composée de différentes fractions; par exemple si on a $x = \frac{a^3+c^3+d^3}{c^2+d^2+f^2} - \frac{(gh+mn-rs)}{t+u}$, on cherchera successivement les valeurs des deux parties du second membre, et on retranchera la seconde valeur de la premiere.

42. Nous observerons que, dans certains cas qui paroissent se rapporter au précédent, on peut se dispenser de recourir aux transformations que nous avons employées. Les cas dont je veux parler sont ceux où le numérateur et le dénominateur peuvent se décomposer en facteurs d'une dimension. Soit, par exemple, $x = \frac{aab-2amb+m^2b}{aa-cc}$. J'observe que cette quantité est la même chose que $x = \frac{b(a-m)^2}{(a+c)(a-c)}$, ou $x = \frac{b(a-m)}{a+c} \times \frac{a-m}{a-c}$. Ainsi, pour avoir la valeur de x, la question est de chercher d'abord une quatrieme proportionnelle (que je nomme n) aux trois lignes représentées par $a+c$, b, $a-m$, et ensuite une quatrieme proportionnelle aux trois lignes représentées par $a-c$, n, $a-m$.

43. Souvent on peut abréger la construction d'une quantité rationnelle, et lui donner de l'élégance par le moyen des propriétés du cercle ou du triangle rectangle. En voici quelques exemples.

44. Soit $x = \frac{bb+bc}{a}$: sur AD $= b + c$, comme diametre (Fig. 24), je décris le demi-cercle ACD; puis, ayant pris AB $= b$, et ayant élevé la perpendiculaire BC, je tire les deux cordes AC, CD; je prends sur CD, prolongée s'il étoit nécessaire, la partie CE $= a$, et ayant mené la droite AE, j'éleve à l'extrémité A de cette ligne la perpendiculaire AF, qui rencontre en F la corde DC prolongée : alors la partie CF est la valeur de x. Car (Géom. 190) $(AC)^2 = AB \times AD = b(b+c) = bb+bc$, et par conséquent $AC = \surd[bb+bc]$. Or, à cause des triangles rectangles semblables ACE, FCA, on a la proportion continue $\therefore$ EC (a) : AC $(\surd[bb+bc])$: CF $= \frac{bb+bc}{a} = x$.

45. Soit $x = \frac{aa+bb}{m}$: je construis un triangle ACD (Fig. 25) rectangle en C, dont le côté CA $= a$, le côté CD $= b$, et par conséquent l'hypoténuse AD $= \surd[aa+bb]$. Sur CD je prends CE $= m$; et ayant prolongé CA vers M, de maniere que CM $=$ AD, je joins les points E et M par la droite EM, sur laquelle j'éleve la perpendiculaire MF, qui rencontre en F le prolongement de DC : alors CF est la valeur de x. Car CM $=$ AD $= \surd[aa+bb]$, et on a la proportion continue $\therefore$ CE (m) : CM $(\surd[aa+bb])$: CF $= \frac{aa+bb}{m} = x$.

46. Soit $x = \frac{aa-bb}{m}$: je construis un triangle rectangle ACD (Fig. 26), dont l'hypoténuse AD $= a$, le côté CD $= b$, et par conséquent le côté AC $= \surd[aa-bb]$. Je fais CE $= m$; je joins les points E et A par la droite EA, à l'extrémité de laquelle j'éleve la perpendiculaire AF,

qui rencontre DC prolongée en F; et CF est la valeur de x.

47. On doit observer que l'expression d'une ligne étant nécessairement d'une seule dimension, si la quantité qu'on donne pour représenter une ligne n'est pas assujettie à cette loi, on doit commencer par l'y ramener, en la multipliant ou en la divisant par une puissance convenable d'une ligne sous-entendue ou choisie arbitrairement pour unité. Soit, par exemple, $x = \frac{ab}{cd}$, quantité dans laquelle a, b, c, d, x, expriment chacune une ligne. Comme la fraction $\frac{ab}{cd}$ est de dimension *nulle*, ou représente un nombre absolu, attendu que le quotient du produit ab, qui est de deux dimensions, divisé par le produit cd de même nature, ne peut être qu'un nombre abstrait, il y a une ligne prise pour unité, qui est sous-entendue. Soit m cette ligne, et multiplions la fraction $\frac{ab}{cd}$ par m, ce qui n'en change pas la valeur; nous aurons $x = \frac{mab}{cd}$, quantité d'une dimension, qui se construit comme nous l'avons expliqué.

Si on avoit $x = \frac{b}{c^3 + eg + h}$, on prendroit m pour unité, et on réduiroit cette quantité à la forme $x = \frac{bm^3}{c^3 + egm + hm^2}$, en multipliant son numérateur par m^3, le second terme de son dénominateur par m, et le troisieme par m^2.

Ainsi des autres.

Construction générale des équations du second degré.

48. Toutes les équations du second degré peuvent être représentées par $xx \pm ax \pm bc = 0$, ou par $xx \pm ax \pm dd = 0$, en transformant le rectangle bc en un quarré dd. Cette équation donne les quatre formules,

I. $xx + ax - dd = 0$, ou $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)}$.

II. $xx - ax - dd = 0$, ou $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)}$.

III. $xx + ax + dd = 0$, ou $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}$.

IV. $xx - ax + dd = 0$, ou $x = +\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}$.

Dans les constructions que nous allons donner de ces formules, nous supposerons que les quantités positives vont de gauche à droite, et que par conséquent les quantités négatives vont de droite à gauche.

Pour construire les deux premieres, faites un triangle ABC (Fig. 27) rectangle en B, dans lequel $BA = \frac{a}{2}$, $BC = d$, et par conséquent $AC = \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)}$. Prenez de part et d'autre du point A les lignes AO, AM, MK, égales chacune à AB, et MN égale à AC; vous aurez

$$\left.\begin{aligned} OC &= +\sqrt{(\tfrac{aa}{4} + dd)} - \tfrac{a}{2} \\ AN &= -[\sqrt{(\tfrac{aa}{4} + dd)} + \tfrac{a}{2}] \end{aligned}\right\} \text{pour la 1re formule.}$$

$$\left.\begin{aligned} MC &= +\sqrt{(\tfrac{aa}{4} + dd)} + \tfrac{a}{2} \\ KN &= -[\sqrt{(\tfrac{aa}{4} + dd)} - \tfrac{a}{2}] \end{aligned}\right\} \text{pour la 2e formule.}$$

De même pour construire les deux dernieres formules (dans lesquelles je suppose $\frac{aa}{4} > dd$, afin que ces formules soient réelles), faites un triangle rectangle ABC (Fig. 28), dont l'hypoténuse $AC = \frac{a}{2}$, le côté $BC = d$, et par conséquent le côté $AB = \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}$. Prenez chacune des trois lignes AO, AM, MK, égale à AB, et la ligne $MN = AC$; vous aurez

$$\left.\begin{aligned} KN &= -\left[\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)}\right] \\ AN &= -\left[\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)}\right] \end{aligned}\right\} \text{ pour la } 3^{e} \text{ formule.}$$

$$\left.\begin{aligned} MC &= +\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)} \\ OC &= +\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)} \end{aligned}\right\} \text{ pour la } 4^{e} \text{ formule.}$$

CHAPITRE III.

Des problèmes indéterminés à deux variables; des lignes courbes en général.

49. Les quantités inconnues qui entrent dans l'équation finale d'un problème indéterminé s'appellent ordinairement quantités *variables*, parcequ'elles sont sujettes à changer, et qu'en donnant successivement différentes valeurs à l'une, les autres ont aussi différentes valeurs correspondantes. On appelle quantités *constantes* celles qui demeurent toujours les mêmes pendant que les précédentes varient.

50. Lorsqu'une équation ne contient que deux variables, avec tel nombre de quantités constantes qu'on voudra, elle peut toujours être censée exprimer la nature d'une courbe décrite sur un plan, dans le sens que nous allons expliquer tout-à-l'heure.

Les équations où il entre trois variables représentent, en général, des surfaces courbes; et leur construction géométrique appartient à la théorie des courbes à *double courbure*, c'est-à-dire des courbes qui le sont en deux sens, et qui ne peuvent pas être tracées sur un seul et même plan. Je ne parlerai pas de ces équations ni de celles qui contiendroient un plus grand nombre de variables.

51. Toute ligne, soit droite, soit courbe, peut être considérée comme décrite par le mouvement d'un point dans l'espace. Si le point suit toujours la même direction, il décrit une ligne droite ; s'il change continuellement de direction, il décrit une ligne courbe. On a une idée très claire de la ligne droite, et on n'éprouve aucune difficulté à la décrire. Mais pour se représenter distinctement la trace ou la courbe décrite par un point dont la direction change sans cesse, on détermine à chaque instant la position du point mobile par rapport à deux lignes droites fixes, de la maniere suivante.

52. Problême I. *Trouver l'équation d'une courbe décrite sur un plan, suivant une loi donnée.*

Soit OMK (Fig. 29) la courbe dont il s'agit. Je mene dans le plan de cette courbe deux droites indéfinies AZ, AQ, qui concourent, sous un angle arbitraire, mais donné, en un point déterminé A. Ensuite, ayant tiré d'un point quelconque M de la courbe la droite MP parallele à AQ, et qui détermine sur AZ une partie AP, j'exprime, par une équation qui se déduit de la loi suivant laquelle la courbe est décrite, la relation des droites AP, PM ; et cette équation s'appelle l'équation de la courbe proposée.

On nomme les droites AP, les *abscisses* ; les droites PM, les *ordonnées* ; l'abscisse AP et l'ordonnée PM, qui répondent à un même point M de la courbe, les *coordonnées* ; la droite AZ, l'*axe des abscisses*, ou simplement l'*axe* ; la droite AQ, l'*axe des ordonnées* ; l'angle ZAQ, l'*angle des coordonnées* ; le point fixe A, l'*origine des coordonnées*, ou simplement l'*origine*.

53. Exemple I. *Soit un cercle* X (Fig. 30), *dont on propose d'exprimer la nature par une équation.*

Je choisis, sur le plan de ce cercle, le point fixe A, par lequel je mene, sous un angle connu, les deux axes AZ, AQ, auxquels je me propose de rapporter tous les points de la circonférence. Puis, ayant pris sur AZ, l'abscisse quelconque

AP, je mene parallèlement à AQ l'ordonnée correspondante PM, qui, prolongée vers m, rencontre en R le diametre BD, que je suppose parallele à AZ. Suivant l'article précédent, il faut déduire de la propriété du cercle, et représenter par une équation, la relation des droites AP, PM. Pour cela on menera par le point M la droite VMO perpendiculaire aux droites AZ, BD; et l'on tirera par l'extrémité B du diametre la droite BT parallele à AQ. Ensuite on observera que le cercle X étant donné de grandeur, et sa position dans l'angle PAQ des coordonnées étant aussi donnée, le diametre BD, les lignes AT, TB, le sinus de l'angle MPO, ou de son égal MRV, sont des quantités toutes connues, et toujours constantes, en quelque endroit de la circonférence que soit placé le point M. Mais les coordonnées AP, PM, sont indéterminées; et les raisonnements qu'on fera pour trouver l'équation qui doit exprimer la relation de ces lignes avec les autres ne doivent pas convenir seulement à un point déterminé de la circonférence, mais être applicables à tous en général. Cela posé,

Soient
- BD. . . . . $= a$,
- AT. . . . . $= b$,
- TB. . . . . $= c$,
- le rayon ou le sinus total . . . . . $= 1$,
- le sinus de l'angle MPO, ou de l'angle MRV, $= p$,
- son cosinus, ou le sinus de chacun des angles PMO, RMV, ... $= q$,
- l'abscisse AP. . . . . $= x$,
- l'ordonnée PM . . . . . $= y$,

On aura (Géom. 460) $VM = RM \times \frac{p}{1} = (PR - PM) \times p = (TB - PM) \times p = p(c - y)$, $VR = q(c - y)$. Donc, $BV = BR - VR = TP - VR = AP - AT - VR = x - b - q(c - y)$; et $VD = BD - BV = a - x + b + q(c - y)$. Or (Géom. 190) on a, pour tous les points M de la circonférence, $(VM)^2 = BV \times VD$. Donc, en mettant dans cette équation, à la place des lignes, leurs valeurs algébriques, on aura $p^2(c - y)^2 = [x - b - q(c - y)] \times [a -$

$x+b+q(c-y)]$, ou bien, $p^2(c-y)^2=ax-xx+2bx-ab-bb+(2qx-2bq-aq)\times(c-y)-q^2(c-y)^2$, ou bien $(p^2+q^2)\times(c-y)^2=ax-xx+2bx-ab-bb+(2qx-2bq-aq)(c-y)$, ou bien encore (en observant que $p^2+q^2=1$, et mettant tout d'un même côté),

(A) $(c-y)^2+(c-y)(2bq+aq-2qx)-ax+xx-2bx+ab+bb=0$.

Cette équation exprime en général la nature du cercle rapporté aux coordonnées AP et PM; et on voit qu'en donnant différentes valeurs à x, on aura les valeurs correspondantes de y; et réciproquement. A une même valeur de x répondent deux valeurs de y; l'une de ces valeurs exprime l'ordonnée PM, l'autre l'ordonnée Pm; car quoiqu'on n'ait cherché que la relation de AP et de PM, il est clair qu'on auroit trouvé de même la relation de AP et de Pm, et que cette relation auroit été exprimée par la même équation. Il n'y a donc pas de raison pour que y exprime plutôt PM que Pm, et conséquemment elle doit exprimer l'une et l'autre ligne, et avoir ainsi deux valeurs correspondantes à une même abscisse AP.

. . . . . .

54. *Corollaire I.* Si, au lieu de supposer que l'angle QAZ des coordonnées est oblique, on supposoit qu'il fût droit (Fig. 31), l'équation se simplifieroit; car alors, $p=1$, $q=0$; et par conséquent l'équation (A) deviendroit,

(B) $yy-2cy-ax+xx-2bx+cc+ab+bb=0$.

II. Si, l'angle des coordonnées étant droit, on suppose de plus (Fig. 32) que l'origine A tombe sur le point T; alors b devient zéro, et l'équation (B) devient,

(C) $yy-2cy-ax+xx+cc=0$.

III. Si, l'angle des coordonnées étant droit, et la quantité b égale à zéro, on suppose de plus que l'origine A tombe sur le point B (Fig. 33); alors c devient zéro, et l'équation (C) devient,

(D) $yy-ax+xx=0$.

On voit, par les différentes équations (A), (B), (C), (D), comment le cercle, sans changer de grandeur et de position,

peut être rapporté à différents axes. Il en est de même pour tout autre courbe. Cette transformation des axes est extrêmement utile dans la théorie des courbes, et nous en verrons plusieurs usages.

55. Exemple II. *Trouver l'équation de la courbe* OMK (Fig. 34), *décrite par un point* M *donné sur une regle* BC *qui se meut dans l'angle droit* QAZ, *de maniere que le point* B *glisse le long de* QA, *tandis que le point* C *glisse le long de* AZ.

Je prends AZ pour l'axe des abscisses, AQ pour celui des ordonnées. La regle BC étant dans une position quelconque, du point décrivant M je mene MP perpendiculaire à AZ, et MN perpendiculaire à AQ. Les droites MB, MC, conservent toujours la même longueur, pendant le mouvement de la regle, mais les coordonnées AP et PM varient continuellement.

$$\text{Soient} \begin{cases} \text{MB} \ldots\ldots\ldots = a, \\ \text{MC} \ldots\ldots\ldots = b, \\ \text{AP} \ldots\ldots\ldots = x, \\ \text{PM} \ldots\ldots\ldots = y, \end{cases}$$

Il est clair qu'on aura $\text{BN} = \sqrt{(aa - xx)}$. Les triangles semblables CPM, MNB, donnent CM (b) : MP (y) :: MB (a) : BN $[\sqrt{(aa - xx)}]$; d'où l'on tire l'équation $b\sqrt{(aa - xx)} = ay$, ou bien, en faisant disparoître le radical, et ordonnant par rapport à y,

$$yy + \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2} = 0,$$

qui est l'équation cherchée. En donnant à x différentes valeurs, on aura les valeurs correspondantes de y; et réciproquement.

56. Exemple III. *Trouver l'équation de la courbe* AMBN (Fig. 35), *qui se forme sur la surface d'un cône droit ou oblique, coupé par un plan* AMBN, *perpendiculaire au plan triangulaire* HSK, *qui partage le cône en deux parties égales et semblables.*

Je prends les abscisses AP sur la section commune AB des deux plans AMBN, HSK, et je mene les ordonnées perpendiculaires PM correspondantes. Par le point P, je mene parallèlement à la base HRKT du cône ou perpendiculairement au triangle HSK, le plan $aMbf$, qui rencontre le plan AMBN suivant PM; et par le même point P je tire du sommet S, à la base, la droite SPV. Cela posé, toutes les dimensions du cône étant données, et la situation du plan sécant AMBN étant aussi donnée, le côté SH, le diametre HK, la portion SA de côté, les angles AaP, APa, PAa, et, ce qui en est une suite, le rapport des lignes AP et Aa, celui des lignes AP et aP, sont des quantités données et toujours constantes. Mais à mesure que l'abscisse AP varie, l'ordonnée PM varie aussi.

Soient
- SH . . . . . $= a$,
- HK . . . . . $= b$,
- SA . . . . . $= c$,
- le rapport de AP à Aa, ou $\frac{\text{AP}}{\text{A}a}$, . . . $= \frac{m}{n}$,
- le rapport de AP à aP, ou $\frac{\text{AP}}{a\text{P}}$, . . . $= \frac{m}{p}$,
- AP . . . . . $= x$,
- PM . . . . . $= y$.

On aura $\text{A}a = \frac{nx}{m}$, $Sa = \text{SA} + \text{A}a = c + \frac{nx}{m}$, $a\text{P} = \frac{px}{m}$. Les triangles semblables SaP, SHV, donnent $Sa\left(c + \frac{nx}{m}\right) : a\text{P}\left(\frac{px}{m}\right) :: \text{SH}(a) : \text{HV} = \frac{apx}{mc+nx}$. Donc $\text{VK} = \text{HK} - \text{HV} = b - \frac{apx}{mc+nx}$. D'un autre côté on a (Géom. 152) $\text{HV}\left(\frac{apx}{mc+nx}\right) : \text{VK}\left(b - \frac{apx}{mc+nx}\right) :: a\text{P}\left(\frac{px}{m}\right) : \text{P}b = \frac{bmc+bnx-apx}{ma}$.

Maintenant, la section $aMbf$ étant parallele à la base du cône, et étant par conséquent un cercle, on a $(\text{PM})^2 = a\text{P} \times \text{P}b$. Donc, en mettant pour ces lignes leurs valeurs algébriques, on aura l'équation $yy = \frac{px}{m} \times \left(\frac{bmc+bnx-apx}{am}\right)$, ou bien

$$yy - \left(\frac{bnpx^2 - ap^2x^2 + bmcpx}{am^2}\right) = 0,$$

qui est l'équation demandée.

On trouveroit encore une équation du second degré, si le plan sécant AMBN n'étoit pas perpendiculaire au plan du triangle SHK. Ce cas se résoudra sans peine, en abaissant alors des points M des perpendiculaires sur le plan HSK, et menant par les points de rencontre des paralleles à AB et au diametre HK. Je me contente de donner cette ouverture aux lecteurs qui voudront s'exercer sur ce problême.

57. Exemple IV. *Trouver l'équation de la courbe* OMK (Fig. 36), *dont la propriété est telle que, menant d'un point fixe* A, *donné de position par rapport à une ligne* CD, *des droites* AO, AM, *à tous ses points, chacune des parties* CO, EM, *de ces lignes soit égale à une quantité donnée* a.

Je mene par le point fixe A, et parallèlement à CD, la droite AZ, sur laquelle je prends les abscisses AP; et, ayant tiré les droites OA, MP, perpendiculaires à l'axe AZ, je nomme AC, b; AP, x; PM, y. Cela posé, les triangles semblables APM, ECA, nous donneront, PM (y) : AM ($\surd(xx + yy)$) :: AC (b) : AE $= \frac{b\surd(xx+yy)}{y}$. Or, d'un autre côté on a AE $=$ AM $-$ EM $= \surd(xx + yy) - a$. Ainsi, en égalant entre elles les deux valeurs de AE, on aura l'équation $\frac{b\surd(xx+yy)}{y} = \surd(xx+yy) - a$; d'où l'on tire,

$$y^4 - 2by^3 + bbyy - aayy + xxyy - 2byxx + bbxx = 0,$$

qui est l'équation demandée. La courbe qu'elle représente est la *conchoïde* de *Nicomede*.

58. Exemple V. *Trouver l'équation de la courbe* AMB (Fig. 37), *dont la propriété est telle que si, ayant décrit sur une droite donnée* AC, *comme diametre, le demi-cercle* AHC, *et ayant élevé par le point* C *la perpendiculaire* CS, *on tire par le point* A, *et par un point quelconque* M *de*

cette courbe, la droite AMKN, *qui rencontre en* K *la demi-circonférence* AHC, *et en* M *la droite* CS, *on ait par-tout,* AM = KN.

Des points M et K j'abaisse les perpendiculaires MP, KV, sur AC; et je nomme AC, $2a$; l'abscisse AP, x; l'ordonnée PM, y. Il est clair que, KN étant égale à AM, si l'on mene KE parallele à AC, les deux triangles KEN, APM, seront parfaitement égaux. Donc $KE = VC = x$, et $AV = AC - VC = 2a - x$. Les triangles semblables APM, AVK, donnent $AP(x) : PM(y) :: AV(2a-x) : KV = \frac{(2a-x)y}{x}$. Or, par la propriété du cercle, $(KV)^2 = AV \times VC$. Ainsi, en mettant pour les lignes leurs valeurs algébriques, on aura l'équation $\frac{(2a-x)^2 y^2}{x^2} = 2ax - xx$, ou $(2a - x)\, y^2 = x^3$; ou

$$yy\,(2a-x) - x^3 = 0,$$

qui est l'équation demandée. La courbe qu'elle représente est la *cissoïde* de *Dioclès*.

On voit par ces exemples la maniere dont il faut s'y prendre pour former l'équation d'une courbe, lorsqu'on connoît la loi suivant laquelle cette courbe est décrite. Il nous reste maintenant à résoudre le problème inverse.

59. Problème II. *Trouver les points par où doit passer une courbe dont l'équation est donnée.*

Je prends pour cela dans le plan sur lequel la courbe doit être décrite un point fixe à volonté pour servir d'origine aux coordonnées; je mene par ce point les deux axes, que je prolonge indéfiniment de part et d'autre, et qui font entre eux un angle donné, qui est celui des coordonnées. Maintenant, je suppose que l'une des deux variables contenues dans l'équation exprime successivement les abscisses de la courbe, tandis que l'autre variable exprime successivement les ordonnées correspondantes, et je cherche par la résolution exacte ou approchée de l'équation les ordonnées qui répondent à chaque abscisse donnée. Chaque or-

donnée étant trouvée, et étant assemblée avec son abscisse, les extrémités de toutes les ordonnées forment une suite de points par où doit passer la courbe.

60. Exemple I. *On demande la description de la courbe représentée par l'équation* $aay + ax^2 - x^3 = 0$; a *exprimant une ligne droite et constante,* x *et* y *les coordonnées de la courbe.*

Soient (Fig. 38) A l'origine des coordonnées, que je suppose perpendiculaires entre elles, et que je prends sur les lignes AZ, AQ. Je supposerai que les abscisses positives vont par rapport au point A dans le sens AZ, et que par conséquent les abscisses négatives qui doivent être prises en sens contraire vont dans le sens Az ; que les ordonnées positives vont par rapport au même point A dans le sens AQ, et que par conséquent les ordonnées négatives vont dans le sens Aq.

Ayant mis l'équation proposée sous cette forme $y = \frac{x^3 - ax^2}{a^2}$, je donne successivement différentes valeurs à x ; et je cherche les valeurs de y qui leur correspondent.

Soit d'abord $x = 0$, on aura aussi $y = 0$. Or l'abscisse et l'ordonnée étant l'une et l'autre zéro au point A, il est clair que ce point est un de ceux de la courbe.

Soit $x = \frac{a}{4}$, on aura $y = -\frac{3a}{64}$; d'où l'on voit qu'à l'abscisse positive $\frac{a}{4}$ répond une ordonnée négative et égale à $\frac{3a}{64}$. Ainsi, si l'on prend sur AZ la partie $AP' = \frac{a}{4}$, et qu'on éleve par son extrémité P' dans l'angle ZAq l'ordonnée $P'M' = \frac{3a}{64}$, le point M' appartiendra à la courbe.

Soit $x = \frac{a}{2}$, on aura $y = -\frac{a}{8}$. Ainsi, en prenant l'abscisse positive $AP'' = \frac{a}{2}$ et l'ordonnée négative $P''M'' = \frac{a}{8}$, le point M'' sera à la courbe.

Soit $x = \frac{3a}{4}$, on aura $y = -\frac{9a}{64}$. Donc, en prenant l'abscisse positive $AP''' = \frac{3a}{4}$, et l'ordonnée négative $P''' M''' = \frac{9a}{64}$, le point M''' sera à la courbe.

En général, quelque valeur positive qu'on donne à x, pourvu que cette valeur soit moindre que a, la valeur correspondante de y est négative. Et si l'on fait $x = a$, la valeur de y est zéro. D'où il suit que la courbe, après s'être enfoncée au-dessous de l'axe AZ, remonte et vient couper cet axe au point P^{IV}, auquel répond l'abscisse $AP^{IV} = a$.

Faisant ensuite généralement $x > a$, y sera positive, et augmentera à mesure que x augmentera. Ainsi, depuis le point P^{IV} la courbe s'éleve au dessus de l'axe AZ, et pousse à l'infini la branche $P^{IV} M$.

Examinons maintenant la figure de cette courbe du côté des x négatives.

On voit qu'en donnant des valeurs négatives à x, les valeurs de y seront toujours négatives. Ainsi la partie de la courbe qui répond aux x négatives tombe entièrement dans l'angle qAz; et elle s'étend à l'infini vers m.

La courbe entiere représentée par l'équation proposée est donc $MP^{IV} M''' M'' M' Am$. On est le maître d'en déterminer tant de points qu'on voudra, et on la décrira d'autant plus exactement qu'on en aura pris davantage.

Cette maniere de décrire une courbe par la détermination des abscisses et des ordonnées correspondantes s'appelle *description par points*, parcequ'on ne trouve en effet par-là qu'un certain nombre (fini) de points par lesquels la courbe doit passer, et que pour la décrire en rigueur il faudroit déterminer un nombre infini de ces points.

61. Exemple II. *Décrire la courbe représentée par l'équation* $x^3 y^3 - 2aaxx + a^4 = 0$, x *et* y *étant les coordonnées*, a *une ligne constante.*

Soient (Fig. 39) A l'origine, AZ et AQ les axes des coordonnées supposées perpendiculaires entre elles. Nous prendrons, comme ci-dessus, les abscisses positives dans le sens AZ, les ordonnées positives dans le sens AQ, et par conséquent les abscisses négatives dans le sens Az, et les ordonnées négatives dans le sens Aq.

L'équation proposée donne $y = \pm \frac{\sqrt{(2a^2x^2 - a^4)}}{x}$. D'où l'on voit qu'en faisant l'abscisse $x = 0$, la double ordonnée correspondante est imaginaire ; ce qui veut dire qu'à l'abscisse zéro il ne répond aucune ordonnée, ou que l'origine A des coordonnées n'est pas un point de la courbe.

En donnant à x une valeur moindre que $\frac{a}{\sqrt{2}}$, la double ordonnée correspondante est toujours imaginaire. Ainsi la courbe n'a aucun point qui réponde à ces abscisses. Mais si l'on fait $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = AP$, on aura $y = 0$; et par conséquent le point P appartient à la courbe.

Faisant ensuite généralement x ou A P' $> \frac{a}{\sqrt{2}}$, on aura deux ordonnées réelles et égales, l'une P' M qui est positive, l'autre P' N' qui est négative. Ces deux ordonnées augmentent à mesure que l'abscisse correspondante AP' augmente. D'où il suit que la courbe a deux branches égales PM', PN', qui s'étendent à l'infini, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe AZ.

Prenons maintenant x dans le sens négatif. Nous voyons que tant que $-x$ sera moindre que $\frac{a}{\sqrt{2}}$, les valeurs de y seront imaginaires. Mais si on fait $-x$ ou $Ap = \frac{a}{\sqrt{2}}$, on aura $y = 0$. Ainsi le point p appartient à la courbe.

Faisant ensuite $-x$ ou Ap' plus grande que $\frac{a}{\sqrt{2}}$, on aura deux ordonnées égales $p'm'$, $p'n'$, l'une positive, l'autre négative, qui augmenteront à mesure que Ap' augmentera. La courbe a donc encore deux branches égales pm',

pn', qui s'étendent à l'infini au-dessus et au-dessous de l'axe Az.

62. *Remarque.* On voit par l'exemple précédent que, l'abscisse d'une courbe étant réelle, l'ordonnée correspondante peut être imaginaire, et qu'alors il n'existe aucun point de la courbe qui réponde à l'abscisse en question.

Cela sert à expliquer comment il peut se faire qu'un problême déterminé soit impossible, quoique l'équation finale donne pour l'inconnue qu'elle renferme une valeur réelle. Car, en regardant cette inconnue comme l'abscisse d'une courbe, et supposant qu'une autre inconnue, dépendante de la premiere, soit l'ordonnée, si la valeur de cette ordonnée correspondante à la valeur trouvée pour l'abscisse est imaginaire, le problême sera impossible. Tel est le problême de l'article 28, relativement à la valeur négative de x, dans le cas où l'on auroit $bb < 8aa$; car à cette valeur qui est réelle répondent deux valeurs imaginaires de y: ce qui indique deux solutions impossibles.

63. *Scholie I.* Le nombre des équations à deux variables étant infini, celui des courbes qu'elles représentent est aussi infini. Les géometres ont imaginé de distribuer les courbes en différentes classes relatives aux degrés des équations qui expriment la nature de ces courbes. Ainsi ils appellent *courbes* ou plutôt *lignes de la premiere classe* ou *du premier ordre*, celles qui sont exprimées par une équation du premier degré; *courbes du second ordre*, celles qui sont exprimées par une équation du second degré; *courbes du troisieme ordre*, celles qui sont exprimées par une équation du troisième degré, etc.

Ces courbes, qui sont ainsi représentées par des équations algébriques, s'appellent en général *courbes algébriques* ou *géométriques*, pour les distinguer d'une autre espece de courbes qu'on appelle *méchaniques*, lesquelles ne peuvent pas être représentées par des équations algébriques, et qui demandent pour leur construction certaines opérations dépendantes du calcul intégral.

64. *Scholie II.* Il n'y a parmi les équations à deux variables que celles d'un degré supérieur au premier qui représentent véritablement des lignes courbes ; car les équations du premier degré représentent toujours des lignes droites. En effet, soit, entre les quantités données a et b, l'abscisse variable (x), et l'ordonnée variable (y), l'équation $y + ax + b = 0$, qui est la plus générale du premier degré. Si le terme y avoit un coëfficient autre que l'unité, on réduiroit toujours l'équation à la forme précédente, en divisant tous les termes par le coëfficient dont il s'agit. En faisant $y + b = z$, on aura la transformée $z + ax = 0$; et lorsqu'on aura trouvé la valeur de z, il ne faudra qu'en soustraire la ligne constante b pour avoir la valeur de y. Le terme ax est censé divisé par une ligne prise pour unité, afin que la loi des homogenes soit observée ; et alors chaque lettre z, a, x, représente une ligne.

Cela posé, ayant pris sur une droite indéfinie AZ (Fig. 40) la partie AO égale à la ligne qui représente l'unité, et ayant mené la droite OK, qui fasse avec AO un angle donné, et qui soit égale à a, tirez par les points A et K la droite indéfinie AM. Il peut arriver qu'on prenne négativement ou positivement le terme $\frac{ax}{1}$.

Si ce terme est négatif, ou qu'on ait $z = \frac{ax}{1}$, il est clair qu'en prenant l'abscisse quelconque $AP = +x$, et menant l'ordonnée PM parallele à OK, on aura $PM = +z$, puisque les triangles semblables AOK, APM, donnent $AO\,(1) : OK\,(a) :: AP\,(x) : PM = ax = z$. Et si le terme ax est pris positivement, ou qu'on ait $z = -ax$, en prenant $Ap = -x$, et menant pn parallele à OK, on aura $pn = -z$, à cause des triangles semblables AOK, Apn.

Ces valeurs positives ou négatives de z étant ainsi trouvées, menez par le point A, et parallèlement à KO, la droite $AA' = b$, et par le point A' menez parallèlement a Zz la droite indéfinie A' Z'. Alors les valeurs de y, qui

correspondent aux valeurs de z, seront les lignes P'M, $p'n$.

Ainsi la droite indéfinie MAn satisfait à tous les cas de l'équation générale du premier degré $y + ax + b = 0$.

Plusieurs auteurs ont écrit sur la théorie des courbes algébriques. Il y a en particulier sur ce sujet deux excellents ouvrages : *l'Introduction à l'Analyse des infiniment petits*, par Euler ; et *l'Analyse des courbes algébriques*, par Cramer.

Mon dessein n'est pas de traiter cette théorie dans toute son étendue ; mais je vais considérer assez au long les courbes du second genre, qu'on appelle ordinairement *sections coniques*, nom qu'elles tiennent des anciens géometres qui les ont envisagées comme des sections du cône. Nous avons vu en effet (56) que la nature de la courbe qui se forme sur la surface d'un cône coupé par un plan quelconque s'exprime par une équation du second degré à deux variables.

CHAPITRE IV.

Des sections coniques.

65. Soit en général MBm (Fig. 41) une courbe du second ordre, dont OR (r) et RM (s) sont les coordonnées variables, faisant constamment entre elles un angle égal à l'angle donné QOT. L'équation de cette courbe est

$$(A)\quad Ps^2 + Qs + Rrs + Sr + Tr^2 + V = 0,$$

qui est la plus générale du second degré. Les lettres P, Q, R, S, T, V, représentent des quantités constantes et données, positives ou négatives, dont quelques unes peuvent être zéro. Sur quoi il faut considérer que tous les termes d'une équation devant être *homogenes* ou d'un même nombre de dimensions, et les coordonnées r et s étant des lignes ; si l'on suppose, par exemple, que P représente a

une ligne, alors Q sera le produit de deux lignes, R une ligne, S le produit de deux lignes, T une ligne, V le produit de trois lignes.

66. Avant que d'entrer dans l'analyse générale de notre équation, observons que, si l'on fait successivement $T = o$, $P = o$, on aura les deux équations :

$$Ps^2 + Qs + Rrs + Sr + V = o,$$
$$Tr^2 + Sr + Rrs + Qs + V = o,$$

qui sont de la même forme. D'où l'on voit, en permutant les coordonnées, qu'elles représentent une seule et même espece de courbe; car la nature d'une courbe est indépendante de la maniere dont elle est tournée dans l'espace, et des coëfficients constants qui affectent les coordonnées, ces coëfficients n'ayant d'influence que sur les dimensions de la courbe. Il suffira donc que l'une de ces équations particulieres soit comprise dans l'examen général de l'équation (A). Or, dans cet examen je vais supposer que P ait une valeur quelconque autre que zéro, et que Q, R, S, etc. ont aussi des valeurs arbitraires, parmi lesquelles je comprends le cas particulier $T = o$.

67. Quant au cas où l'on auroit tout à-la-fois $T = o$, $P = o$, et par conséquent $Qs + Rrs + Sr + V = o$, je le traiterai séparément (59).

68. Divisons tous les termes de l'équation générale par P, et faisons, pour abréger, $\frac{Q}{P} = a$, $\frac{R}{P} = b$, $\frac{S}{P} = c$, $\frac{T}{P} = d$, $\frac{V}{P} = e$; nous aurons

$$(B)\quad s^2 + as + brs + cr + dr^2 + e = o.$$

Faisons disparoître le second terme de cette équation pour en avoir une autre qui soit plus simple. Il faudra, pour cela, supposer $s = z - \left(\frac{a + br}{2}\right)$; ce qui donne la transformée $zz + \left(c - \frac{ab}{2}\right)r + \left(d - \frac{b^2}{4}\right)r^2 + e - \frac{aa}{4} = o$,

ou (en faisant, pour abréger, $\frac{ab}{2} - c = A$, $\frac{b^2}{4} - d = B$, $\frac{aa}{4} - e = C$),

$$(C) \quad zz - Ar - Br^2 - C = o.$$

Cette transformation ne change rien à la figure ni à la position de la courbe ; les deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, de la nouvelle variable sont d'ailleurs égales. En effet cette équation est réductible à la forme $zz - M = o$, qui donne $z = \pm\sqrt{M}$.

69. On voit que l'abscisse r est ici la même que dans l'équation primitive. Mais à la place de l'ordonnée s, nous avons maintenant l'indéterminée z, dont il faut trouver l'expression géométrique. Je représente pour cela le nombre absolu $\frac{b}{2}$ par la fraction $\frac{f}{g}$, dont les deux termes sont des nombres donnés ou des lignes données ; et ayant pris sur l'axe OT la partie $OK = g$, je mene parallèlement à MR la droite $KV = f$; ensuite je mene par les points O et V la droite ONV, ce qui donne évidemment $RN = \frac{fr}{g} = \frac{br}{2}$, à cause des triangles semblables OKV, ORN. Je prends sur le prolongement de QO la partie $OA = \frac{a}{2}$, et je mene AP parallele à ON. Alors, à cause de $PM = PN + NR + RM = AO + NR + RM = \frac{a}{2} + \frac{br}{2} + s$; il est clair que PM sera la valeur de z, puisqu'on a $s = z - \frac{a+br}{2}$, ou $z = \frac{a}{2} + \frac{br}{2} + s$. Ainsi, dans l'équation (C), la courbe est maintenant rapportée aux droites OR et PM.

70. Mais comme l'une de ces lignes ne prend pas son origine sur l'autre, à la maniere des coordonnées ordinaires, nous allons rapporter la courbe aux droites AP et PM, qui satisfont à cette condition. Or dans le triangle OKV tout est donné ou calculable, puisqu'on connoît OK, KV, et l'angle

OKV qui est égal à l'angle donné MRT. Donc, si nous nommons p le sinus de l'angle MRT, q le sinus de l'angle ONR ou OVK, u la droite ON ou AP, on aura OR (r) : ON (u) :: q : p, et par conséquent $r = \frac{qu}{p}$. Substituant cette valeur de r dans l'équation (C), on aura

$$(D) \qquad zz - \frac{Aqu}{p} - \frac{Bq^2u^2}{p^2} - C = 0;$$

équation de la courbe rapportée aux coordonnées AP (u) et PM (z). Cette courbe est partagée en deux parties égales par l'axe AZ des abscisses, puisque les deux valeurs de z, l'une positive, l'autre négative, c'est-à-dire PM et Pm, sont égales, et ne different que par la position.

71. L'angle QOT des coordonnées primitives ayant été pris à volonté, il peut être tel que celui APM des nouvelles ordonnées soit droit. Si cela arrive, on aura q = sinus total = 1, $p = \frac{\sqrt{(gg - ff)}}{g} = \sqrt{(1 - \frac{bb}{4})}$. Si l'angle des coordonnées primitives étoit droit, on auroit $p = 1$, $\frac{1}{q} = \sqrt{(1 + \frac{bb}{4})}$.

Il est clair que dans tous les cas l'équation (D) est de la même forme, et qu'il n'y arrive autre chose, lorsqu'on fait varier l'angle QOT, sinon que les coëfficients de u et de u^2 changent de grandeur.

72. Mettons l'équation (D) sous la forme

$$zz = C + \frac{Aqu}{p} + \frac{Bq^2u^2}{p^2}.$$

Cela posé, je distingue trois cas: le premier, où $B = 0$; le second, où B est une quantité négative; le troisieme, où B est une quantité positive. Les signes de C et de A n'ont pas d'influence sur l'espece de la courbe, comme on le verra bientôt.

I. Cas. $zz = C + \frac{Aqu}{p}$.

Si l'on fait $u = 0$, on aura $z = \pm\sqrt{C}$. Et si l'on suppose que les u positives, allant de A vers Z, ou de gauche

à droite, augmentent continuellement, les z, tant positives que négatives, augmenteront aussi continuellement; en sorte que la courbe s'étend à l'infini de part et d'autre de l'axe AZ. Du côté des u négatives, la courbe vient couper l'axe ZA au point B, où l'on a $z = 0$; ce qui donne $C + \frac{Aqu}{p} = 0$, ou, $u = -\frac{Cp}{Aq}$: elle ne s'étend pas au-delà, et elle est composée seulement de deux branches BM, Bm, qui, à compter du point B, s'étendent à l'infini, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe BZ.

Si la quantité C étoit négative, les ordonnées z ne commenceroient à devenir réelles qu'à l'endroit où l'on auroit $z = 0$, ou $u = \frac{Cp}{Aq}$; le point B tomberoit donc à droite du point A, et les deux branches infinies de la courbe seroient entièrement placées à droite du point A.

Si, C étant positive ou négative, A étoit négative, la courbe n'auroit encore que deux branches infinies; mais alors, au lieu d'être tournées vers la droite, comme tout-à-l'heure, elles seroient tournées vers la gauche, ce qui n'apporte aucun changement dans l'espece de la courbe.

II Cas. $zz = C + \frac{Aqu}{p} - \frac{Bq^2u^2}{p^2}$.

Soit qu'on prenne u positivement ou négativement, si l'on fait u infinie, l'équation deviendra $zz = -\infty$, parceque C, $\frac{Aq}{p}$, $\frac{Bq^2}{p^2}$, étant des quantités finies, les deux premiers termes du second membre s'évanouissent par rapport au troisieme. Ainsi on aura $z = \pm\sqrt{-\infty}$, quantités imaginaires. D'où l'on doit conclure que la courbe n'a point de branches qui s'étendent à l'infini dans aucun sens, et qu'elle est située tout entiere dans un espace fini et déterminé.

III Cas. $zz = C - \frac{Aqu}{p} + \frac{Bq^2u^2}{p^2}$.

Qu'on prenne u positivement ou négativement, si l'on

fait u infinie, l'équation deviendra $zz = \infty$, ce qui donne $z = \pm\sqrt{\infty}$, valeurs réelles. D'où l'on doit conclure que la courbe entiere est composée de quatre branches infinies, qui s'étendent de part et d'autre de l'axe des u; les deux premieres répondent aux u positives, et les deux autres répondent aux u négatives.

73. Ces formules comprennent toutes les suppositions qu'on peut faire pour les valeurs de P, Q, R, etc., avec cette seule condition que P ne soit pas zéro. Je n'ai pas besoin de faire observer qu'il faut exclure de ces suppositions celles qui détruiroient l'hypothese que l'équation (A) est une équation indéterminée du second degré entre les coordonnées variables r, s, et les quantités constantes. Telles seroient, pour exemples, les suivantes :

Si on avoit tout à-la-fois $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, l'équation (A) deviendroit $Ps^2 + Qs + V = 0$, qui est une équation déterminée, laquelle ne peut représenter aucune courbe.

Si on avoit tout à-la-fois $S = 0$, $T = 0$, $V = 0$, l'équation (A) deviendroit $Ps^2 + Qs + Rrs = 0$, ou (en divisant tout par s), $Ps + Q + Rr = 0$, équation à la ligne droite (64).

Ainsi de quelques autres.

74. Il nous reste à examiner, comme nous l'avons promis, l'hypothese où l'on auroit tout à-la-fois $P = 0$, $T = 0$, qui semble former une classe à part.

Dans cette hypothese l'équation (A) devient

$$Qs + Rrs + Sr + V = 0.$$

Faisons $s = t - r$; t étant une nouvelle variable, nous aurons (en éliminant s),

$$Qt - Qr + Rrt - Rr^2 + Sr + V = 0;$$

par où l'on voit que si par l'origine O des coordonnées primitives r, s, on mene la droite Oh de telle maniere que, prolongeant MR, les deux angles ROh, RhO, soient égaux, on aura (à cause de Rh = RO = r, et $t = r + s$), on aura,

dis je, $t = hM$. Ainsi la courbe se trouvera rapportée aux lignes OR (r), et hM (t). Or, dans le triangle ORh, le rapport des côtés OR, Oh, est donné. Donc, en supposant $Oh = v$, nous aurons $r = nv$, n étant un nombre donné. Substituant cette valeur de r dans l'équation précédente, nous aurons,

$$Qt - Qnv + Rnvt - Rtt'v^2 + Snv + v = 0;$$

ou, (en ordonnant par rapport à v^2, divisant tout par Rn^2, et faisant, pour abréger, $\frac{S-Q}{Rn} = h$, $\frac{Q}{Rn^2} = k$, $\frac{V}{Rn^2} = m$),

$$v^2 - \frac{(t+hn)}{n}v = kt - m = 0.$$

Faisons disparoître le second terme de cette équation, en supposant $v = z + \frac{t+hn}{2n}$; nous aurons la transformée

$$zz - \frac{(t+hn)^2}{4n^2} - kt - m = 0,$$

qui est analogue à l'équation (C) de l'article 68. En faisant donc ici des opérations analogues à celles qu'on a faites sur l'équation (C), on parviendra à une équation de cette forme:

$$zz - A'u^2 + B'u + C' = 0,$$

où la courbe est rapportée aux coordonnées z et u: A', B', C', sont des constantes données. Or, comme le second terme est ici essentiellement négatif, on voit que cette équation se rapporte au troisième cas de l'article 72, et que par conséquent la courbe représentée est pareillement composée de quatre branches infinies, entièrement les mêmes (aux dimensions près) que celles de la courbe de ce troisième cas.

75. *Scholie général.* Il résulte de tous ces calculs qu'il y a seulement trois especes particulieres de courbes du second genre. La premiere de ces courbes est composée de deux branches infinies, et s'appelle *parabole*; la seconde a un cours fini, et se nomme *ellipse*; la troisieme est composée de quatre branches infinies, et se nomme *hyperbole*. Nous

allons examiner séparément et en détail les principales propriétés de ces courbes; mais avant que d'entamer ce sujet, commençons par définir certaines lignes dont nous ferons un fréquent usage.

76. On appelle *tangente*, comme le mot l'indique assez, une droite TM (Fig. 42), qui touche une courbe OMK en un point M sans la couper; *sous-tangente*, la partie PT de l'axe comprise entre l'ordonnée MP et le point T, où la tangente va rencontrer l'axe prolongé s'il est nécessaire; *perpendiculaire* ou *normale*, la droite RM perpendiculaire à la tangente au point M, et terminée en R par l'axe; *sous-perpendiculaire*, ou *sous-normale*, la partie PR de l'axe comprise entre l'ordonnée et la perpendiculaire.

SECTION I.

De la Parabole.

77. L'équation de la parabole est $zz = C + \frac{Aqu}{p}$. Supposons que l'angle des coordonnées u et z soit droit; ce qui est permis, puisque l'équation est toujours de la même forme, quelle que soit l'espece de cet angle (71). De plus, transportons l'origine des coordonnées sur un point même de la courbe; nous mettrons, pour cela, l'équation précédente sous cette forme, $zz = \frac{Aq}{p}(\frac{Cp}{Aq} + u)$, et nous ferons $\frac{Cp}{Aq} + u = x$; ce qui donne, $zz = \frac{Aq}{p} \times x$, ou bien (en supposant $\frac{Aq}{p} = m$, $z = y$), $yy = mx$, qui est la plus simple de toutes les équations que l'on peut employer pour exprimer la nature de la parabole.

78. On voit par cette équation que si l'on suppose (Fig. 43)

l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée perpendiculaire PM $= y$; la parabole passera par le point A, puisque $x = 0$ donne $y = 0$; et que cette courbe sera divisée en deux parties parfaitement égales et semblables par l'axe AZ, puisque, si l'on imaginoit que la partie APM demeurant immobile, la partie APm tournât autour de AP, et vînt s'appliquer sur APM, tous les points m tomberoient sur les points M.

L'équation dont il s'agit va nous servir à trouver successivement toutes les propriétés de la parabole.

On appelle *parametre* de l'axe AZ, ou de la parabole, la ligne donnée m, qui multiplie constamment l'abscisse variable x.

79. Théorême I. *Dans la parabole, le quarré de l'ordonnée* PM *est égal au produit de l'abscisse correspondante par le parametre.*

Cet énoncé est la traduction de l'équation $yy = mx$. De là suit cette construction.

Ayant mené les deux axes perpendiculaires AZ, QAq (Fig. 44), des coordonnées, prolongez l'axe ZA au-delà de A de la quantité AB égale au parametre m; décrivez plusieurs cercles qui, ayant leurs centres sur la droite BZ, passent tous par le point B, et dont les diametres soient plus grands que BA; par les points P, Q, q, où ils coupent les axes AZ, Qq, menez, parallèlement à ces axes, les droites PM, QM, Pm, qm. Le lieu des points M, A, m, sera notre parabole. En effet, on a, par la propriété du cercle, $(AQ)^2 = AP \times AB$. Or, AQ $=$ PM; donc on aura $(PM)^2 = AP \times AB$, c'est-à-dire $yy = mx$.

80. *Corollaires. I.* Les quarrés des ordonnées PM, P$'$M$'$ (Fig. 43), sont entre eux comme les abscisses correspondantes AP, AP$'$. Car $(PM)^2 = AP \times m$, $(P'M')^2 = AP' \times m$; donc $(PM)^2 : (P'M')^2 :: AP \times m : AP' \times m :: AP : AP'$.

II. Si, par un point quelconque K de la parabole (Fig. 43), on mene la droite KH parallele à l'axe AZ, et qui rencontre en H la double ordonnée Mm; le produit de la partie KH

allons exami-
priété
comi
fréq

par le parametre m, sera égal au produit des
de la ligne Mm, c'est-à-dire qu'on
$MH \times Hm$. En effet, on a $AP \times m = (PM)^2$;
KV perpendiculaire à AZ, on aura
$(KV)^2 = (HP)^2$. Donc $AP \times m -$
$(HP)^2$. Or, $AP \times m - AV \times m = KH \times m$,
$(HP)^2 = MH \times Hm$, parceque la ligne Mm est
deux parties égales au point P. Donc, $KH \times m =$,
$MH \times Hm$.

81. *Problème. Trouver l'expression de la sous-tangente PT (Fig. 45), correspondante à la tangente* MT *et à l'ordonnée* MP.

Menons, par le point M, la droite NMO qui, rencontre la parabole en un autre point N, et l'axe ZA prolongé, au point O ; menons de plus l'ordonnée NV à l'axe AZ, et la droite MH parallele au même axe.

Soient
- le parametre de l'axe AZ . . . . . $= m$,
- l'abscisse AP. . . . . $= x$,
- l'ordonnée PM . . . . . $= y$,
- la partie PV de l'axe, comprise entre les deux ordonnées PM, VN, ... $= z$,
- la partie NH de l'ordonnée NV. . . . $= u$,
- la partie PO de l'axe, comprise entre l'ordonnée PM et le point O, ... $= s$.

Les triangles semblables OPM, MHN, donnent PO (s) : PM (y) :: MH (z) : HN $(u) = \frac{zy}{s}$. Or, on a $yy = mx$; $(y+u)^2 = m(x+z)$, ou $yy + 2uy + u^2 = mx + mz$. Retranchant la premiere de ces équations de la seconde, on aura $2uy + uu = mz$, ou bien en mettant pour u sa valeur $\frac{zy}{s}$, $\frac{2zyy}{s} + \frac{z^2y^2}{s^2} = mz$, ou bien $\frac{2yy}{s} + \frac{zy^2}{s^2} = m$.

Maintenant, supposons que MH (z) devienne infiniment petite : il est visible que VN se confondra avec PM, la sécante NMO avec la tangente MT, PO avec la sous-tangente

PT, et que l'équation $\frac{2yy}{s} + \frac{zy^2}{s^2} = m$ se réduit à $\frac{2yy}{s} = m$; d'où l'on tire s ou $PT = \frac{2yy}{m} = \frac{2mx}{m} = 2x$.

Ainsi *la sous-tangente* PT *est double de l'abscisse correspondante* AP.

82. *Corollaires. I.* La tangente TM, qui est égale à $\sqrt{[(PM)^2 + (PT)^2]}$, par la propriété du triangle rectangle, sera exprimé par $\sqrt{(mx + 4xx)}$.

II. La sous-perpendiculaire PR est toujours la moitié du parametre m. Car, à cause du triangle rectangle TMR, l'ordonnée PM est moyenne proportionnelle entre PT et PR, c'est-à-dire qu'on a $PT(2x) : PM(y) :: PM(y) : PR = \frac{yy}{2x} = \frac{mx}{2x} = \frac{m}{2}$.

III. La perpendiculaire RM, qui est égale à $\sqrt{[(PM)^2 + (PR)^2]}$, est exprimée par $\sqrt{(mx + \frac{mm}{4})}$.

83. Théorême II. *Si l'on prend sur l'axe* AZ (Fig. 46) *la partie* AF *égale au quart du parametre, et qu'on mene du point* F *au point* M, *où la droite* TMV *touche la parabole, la droite* FM, *et par le point* M *la droite* MH *parallele à l'axe* AZ; *les deux angles* FMT, HMV, *seront constamment égaux.*

Menons à l'axe AZ l'ordonnée MP; et nommons AP, x; le parametre, m: il est clair qu'à cause de AT = AP (81), on aura $FT = x + \frac{m}{4}$. De plus, on aura $FP = AP - AF = x - \frac{m}{4}$, ou (si le point P tomboit entre A et F), $FP = \frac{m}{4} - x$; et par conséquent dans l'un et l'autre cas, $(FP)^2 = x^2 - \frac{mx}{2} + \frac{m^2}{16}$. Donc $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$

$= mx + x^2 - \frac{mx}{2} + \frac{m^2}{16} = x^2 + \frac{mx}{2} + \frac{m^2}{16} = (x + \frac{m}{4})^2$;

et $FM = x + \frac{m}{4}$. Ainsi $FM = FT$; et par conséquent le triangle FMT est isoscele. D'où il suit que l'angle FMT est égal à l'angle FTM, ou à son égal HMV.

Le point F s'appelle, à cause de cette propriété remarquable, *foyer* de la parabole. On voit que si on y place un corps lumineux, sonore, chaud, etc., duquel émanent des atomes qui soient supposés se réfléchir en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; ces atomes, allant frapper la parabole MA*m*, se réfléchiront parallèlement à son axe AZ.

84. *Corollaire I.* La perpendiculaire FK, abaissée du foyer sur la tangente, a pour expression $\frac{\sqrt{(4mx + m^2)}}{4}$. Car $(FK)^2 = (FM)^2 - \frac{(TM)^2}{4} = (x + \frac{m}{4})^2 - \frac{mx + 4xx}{4}$ $= xx + \frac{mx}{2} + \frac{m^2}{16} - \frac{mx}{4} - xx = \frac{4mx + m^2}{16}$, et par conséquent $FK = \frac{\sqrt{(4mx + m^2)}}{4}$.

85. *Corollaire II.* Le rapport $\frac{FK}{FT}$ ou $\frac{FK}{FM} = \frac{\sqrt{(4mx + m^2)}}{4x + m}$ $= \sqrt{(\frac{m}{4x + m})}$.

86. *Remarque.* La propriété qu'a la droite FM, menée du foyer à un point quelconque de la parabole, d'être égale à la somme de l'abscisse correspondante AP et du quart du parametre, fournit cette maniere de tracer la parabole par un mouvement continu.

Fixez, sur un plan, une regle BC (Fig. 47), le long de laquelle puisse glisser une équerre EHK, par son côté EH. Ayant pris un fil KMF, égal en longueur à l'autre côté EK de l'équerre, attachez l'un des bouts de ce fil au point K, et l'autre bout au point fixe F, situé dans le plan de la regle et de l'équerre. Au moyen d'un style M, tendez le fil de

maniere que le point M soit toujours placé sur EK, et qu'en faisant glisser l'équerre le long de la regle, le style M se meuve le long de EK : ce style M décrira la demi-parabole AM. Et si l'on renverse l'équerre de l'autre côté, on décrira semblablement l'autre demi-parabole A*m*.

Propriétés de la parabole par rapport à ses diametres.

87. On appelle *diametre* de la parabole toute droite MH (Fig. 48) menée, par un point quelconque M, parallèlement à son axe AZ. Les parties MN de ce diametre en sont les abscisses; et les droites VN ou *u*N, menées parallèlement à la tangente MT qui passe par l'origine M du diametre, en sont les ordonnées.

On voit que la parabole n'a qu'un seul axe AZ, puisque le point A est unique sur son périmetre; mais qu'elle a une infinité de diametres, puisque le nombre des points M est infini. Les angles des coordonnées de tous ces diametres sont différents.

Une ligne quadruple de la droite MF, menée de l'origine M du diametre MH au foyer, s'appelle le parametre de ce diametre, de même que le quadruple de la droite AF est le parametre de l'axe AZ.

88. Théorême III. *Le quarré de l'ordonnée* VN *au diametre* MH *est égal au produit de l'abscisse correspondante* MN *par le parametre de ce diametre, c'est-à-dire qu'on a* $(VN)^2 = MN \times 4MF$.

Menez, des points M et V, les ordonnées MP, VK, perpendiculaires à l'axe AZ.

Soient
- AP. . . . . $= x$,
- PM. . . . . $= y$,
- le parametre de l'axe AZ. . . . . $= m$,
- MN. . . . . $= u$,
- VN. . . . . $= z$,
- le parametre du diametre MH, ou 4MF. . . . . $= q$,
- la tangente MT. . . . . $= t$.

On aura (81, 82, 83), $PT = 2x$, $tt = mx + 4x^2 = 4x\left(x + \frac{m}{4}\right) = 4x \times MF = qx$.

Les triangles semblables TPM, NHV, donnent,

$$TM(t) : MP(y) :: VN(z) : VH = \frac{zy}{t},$$

$$TM(t) : PT(2x) :: VN(z) : NH = \frac{2xz}{t}.$$

Donc, $VK = MP + VH = y + \frac{zy}{t} = \frac{y(t+z)}{t}$; $AK = AP + MN + NH = x + u + \frac{2xz}{t}$. Or (79), $(VK)^2 = m \times AK$. On aura donc $\frac{yy(t+z)^2}{t^2} = m\left(x + u + \frac{2xz}{t}\right)$, ou bien (en mettant pour yy sa valeur mx, et réduisant), $zzx = ttu$; ou bien (en mettant pour tt sa valeur qx, et réduisant), $zz = qu$.

89. *Corollaires. I.* En comparant l'équation $zz = qu$ avec l'équation $yy = mx$, on voit que la parabole a la même propriété par rapport à un diametre quelconque que par rapport à son axe. Les deux ordonnées NV, Nu, posées en sens contraires, sont égales, parceque les deux racines de l'équation $z = \pm\sqrt{qu}$ sont égales, et ne different que par le signe.

II. Si par le point V on mene la tangente Vt à la parabole, laquelle rencontre en t le diametre HM prolongé, la sous-tangente Nt, correspondante à l'abscisse MN, sera double de cette abscisse. Cela se démontre en employant la propriété exprimée par l'équation $zz = qu$, comme on a employé (81) la propriété exprimée par l'équation $yy = mx$.

90. Théorême IV. *Le parametre d'un diametre quelconque de la parabole est au parametre de l'axe, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de l'angle que l'axe fait avec la tangente menée par le sommet du*

diametre, ou de l'angle que fait le diametre avec ses ordonnées.

Car on a trouvé (86), $\frac{FK}{FM} = \sqrt{\frac{m}{4x+m}}$; d'où l'on tire, en quarrant et réduisant en proportion, $4x+m$; m :: $(FM)'$; $(FK)'$; ce qui revient à l'énoncé du théorême ; car le parametre du diametre $MH = 4FM = 4x+m$; le parametre de l'axe $= m$; et le rapport de $(FM)'$ à $(FK)'$ est le même que celui du quarré du rayon au quarré du sinus de l'angle FMT ou PTM ou HNV.

91. *Corollaire.* Donc les parametres de deux diametres sont entre eux en raison réciproque des quarrés des sinus des angles qu'ils forment avec leurs ordonnées ; ce qui est évident, en comparant chacun de ces parametres avec celui de l'axe.

92. Problême II. *Connoissant le parametre d'un diametre, et l'angle que les ordonnées à ce diametre doivent faire avec lui, décrire la parabole par plusieurs points.*

On voit que la question est de décrire la courbe qui a pour équation $zz = qu$, q étant le parametre donné, u et z les coordonnées de la courbe, qui font entre elles un angle donné ; problême qui se résout par la méthode de l'article 59. Il ne s'agit que de prendre, pour chaque abscisse u, une ordonnée qui soit moyenne proportionnelle entre u et q.

93. Problême III. *Connoissant le parametre d'un diametre, et l'angle de ce diametre avec ses ordonnées, trouver la position de l'axe de la parabole, son sommet et son parametre.*

Prenez à volonté le point M pour l'origine du diametre proposé MH ; menez, par ce point M, la droite OMT, qui fasse avec MH un angle OMH égal à celui que doit faire le diametre MH avec ses ordonnées ; tirez la droite MF, qui fasse avec MT l'angle FMT, égal à chacun des

deux angles que nous venons d'indiquer; prenez MF égale au quart du parametre donné du diametre MH : le point F sera le foyer de la parabole. Et si, par ce point F, on mene parallèlement à MH la droite TFZ, l'axe de la parabole tombera sur cette ligne. Menez MP perpendiculaire à TZ, et divisez TP en deux parties égales, au point A; ce point sera le sommet de la parabole; le quadruple de AF sera son parametre.

La démonstration de cette construction est une suite évidente des propositions qui précedent.

94. Problême IV. *Connoissant le parametre d'un diametre, et l'angle de ce diametre avec ses ordonnées, trouver la position d'un autre diametre, qui doive faire avec ses ordonnées un angle donné.*

Ayant déterminé, par le problême précédent, l'axe AZ de la parabole, son sommet et son parametre; imaginons que SY, parallele à AZ, soit le diametre cherché, et que par le point S on ait mené la tangente SX, la droite SF au foyer, et l'ordonnée perpendiculaire SG à AZ : le triangle FXS sera isoscele; et chacun des angles X et S, à la base, étant égal à l'angle donné que le diametre SY doit faire avec ses ordonnées, les angles SFX, SFG, seront donnés. Donc le rapport de FG à FS est donné; c'est-à-dire qu'on a $FG = n \times FS$, n étant une fraction donnée. Et comme on a d'ailleurs $FS = AG + AF = FG + 2AF$, ou bien $FG = FS - 2AF$; on aura $n \times FS = FS - 2AF$; ou bien $FS = \frac{2AF}{1-n}$. Donc on connoîtra l'origine et la position du diametre cherché SY.

95. Théorême V. *Deux paraboles quelconques* MAN man (Fig. 49 et 50), *sont toujours des courbes semblables.*

Deux courbes semblables en général peuvent être considérées comme deux polygones semblables d'une infinité de côtés : ainsi toutes leurs lignes homologues doivent être proportionnelles. Le théorême sera donc démontré,

si l'on fait voir qu'en prenant les abscisses AP, ap, dans la raison des parametres, les ordonnées MP, mp, sont aussi dans la même raison. Nommons P et p les parametres des deux courbes; AP, x; PM, y; ap, u; pm, z. On aura $yy = Px$, $zz = pu$. Or, par hypothese, $x : u :: P : p$. Donc $u = \frac{px}{P}$; substituant cette valeur de u dans l'équation $zz = pu$, on aura $zz = \frac{ppx}{P}$. Donc $yy : zz :: Px : \frac{ppx}{P} :: PP : pp$; et en tirant les racines quarrées, $y : z :: P : p$.

SECTION II.

De l'Ellipse.

96. L'équation de l'ellipse est (72) $zz = C + \frac{Aqu}{p} - \frac{Bq^2u^2}{p^2}$. Je suppose que les coordonnées u et z soient perpendiculaires entre elles. Pour transporter l'origine des coordonnées sur un point de la courbe, j'observe qu'à l'endroit où l'axe des u coupe la courbe, on a $z = o$. D'où il suit que si l'on fait $z = o$, et qu'on résolve l'équation $o = C + \frac{Aqu}{p} - \frac{Bq^2u^2}{p^2}$, laquelle donne pour u la valeur déterminée $u = \frac{A.p \pm \sqrt{[A^2p^2 + 4B.C.p^2]}}{2B.q}$; qu'ensuite on suppose en général $u - (\frac{A.p \pm \sqrt{[A^2p^2 + 4B.C.p^2]}}{2B.q}) = x$; $z = y$: on aura une transformée de cette espece, $yy = Mx - Nx^2$ (M et N étant des quantités données), dont la nature est telle que l'origine des x et des y est un point de la courbe, puisque $x = o$ donne $y = o$; et réciproquement. Cette équation devient $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, en supposant $M = m$, $N = \frac{m}{2a}$. Alors l'équation est homo-

gene; et chacune des lettres a, m, x, y, représente une ligne. La nature de l'ellipse est ainsi exprimée d'une manière très simple.

97. Qu'on prenne (Fig. 51) la droite AE $= 2a$; et sur cette ligne l'abscisse quelconque AP $= x$, à laquelle réponde l'ordonnée perpendiculaire PM $= y$. Nous voyons, par l'équation $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, que, si l'on fait $x = 0$, on aura $y = 0$. Ainsi la courbe passe par le point A, origine des coordonnées. Si l'on fait $x = 2a$, on aura encore $y = 0$; et par conséquent la courbe passe encore par le point E. Si lon faisoit $x > 2a$, les ordonnées correspondantes seroient imaginaires : et si l'on faisoit x négative, les ordonnées correspondantes seroient aussi imaginaires. D'où il suit que la courbe ne s'étend ni en-delà du point E, ni en-deçà du point A.

Soit $x = \frac{a}{2}$; on aura $y = \pm\sqrt{\frac{3am}{8}}$. Donc à l'abscisse AP $(\frac{a}{2})$ répondent deux ordonnées PM, Pm, l'une positive, l'autre négative, égales chacune à $\sqrt{\frac{3am}{8}}$. Soit $x = \frac{3a}{2}$; on trouvera encore $y = \pm\sqrt{\frac{3am}{8}}$; c'est-à-dire qu'à l'abscisse AP' $(\frac{3a}{2})$ répondent deux ordonnées P'M', P'm', l'une positive, l'autre négative, égales chacune à $\sqrt{\frac{3am}{8}}$. En général, si l'on fait d'abord $x = a - h$, ensuite $x = a + h$; on trouvera, dans l'un et l'autre cas, $y = \pm\sqrt{[\frac{m}{2a}(aa - hh)]}$. D'où l'on doit conclure que toutes les ordonnées, soit positives, soit négatives, prises à égales distances des extrémités et du milieu G de la droite AE, sont égales entre elles, et que par conséquent les quatre portions AB, BE, ED, DA, de la courbe sont égales; ou, ce qui revient au même, que l'ellipse, après s'être élevée au-dessus de AE jusqu'en B, redescend par

les mêmes degrés jusqu'en E, où elle commence un nouveau cours parfaitement égal au premier, et revient au point A.

98. Nous observerons en passant que si on avoit $m = 2a$, et par conséquent $yy = 2ax - xx$, l'ellipse se changeroit en un cercle, puisque l'équation du cercle est $yy = 2ax - xx$. Et que si on avoit $2a = \infty$, le terme $\frac{mxx}{2a}$ s'évanouiroit par rapport au terme mx, et qu'on auroit $yy = mx$; d'où l'on voit qu'alors l'ellipse se changeroit en parabole, puisque l'équation de cette derniere courbe est $yy = mx$. Revenons à l'ellipse proprement dite, c'est-à-dire au cas où les lignes $2a$ et m sont l'une et l'autre finies et inégales.

99. On appelle la droite AE ($2a$) le *premier axe* de l'ellipse; la ligne représentée par m, *le parametre* de cet axe; la double ordonnée BD, qui répond au milieu C de l'axe AE, ou au *centre* de l'ellipse, le *second axe* de l'ellipse.

La valeur du second axe BD (qui peut être < ou > AE) se trouve en faisant $x = a$, et doublant la valeur correspondante de y. Nommant donc $2b$ cet axe, on a, $2b = 2\sqrt{\frac{am}{2}} = \sqrt{2am}$. D'où l'on voit que le second axe est une moyenne proportionnelle entre le premier axe $2a$ et son parametre m; ou, ce qui revient au même, que le parametre du premier axe est une troisieme proportionnelle à cet axe et au second.

Le second axe a son parametre, de même que le premier. Ce parametre est une troisieme proportionnelle au second axe et au premier. De sorte qu'en nommant n ce même parametre, on a $2a = \sqrt{2bn}$, ou $n = \frac{4aa}{2b} = \frac{2aa}{b}$.

100. Théorème I. *Dans l'ellipse, le quarré de l'or*

née PM *au premier axe, est au rectangle* AP × PE *des parties de cet axe, comme le parametre de cet axe, est au même axe, ou comme le quarré de la moitié du second axe, est au quarré de la moitié du premier.*

Cet énoncé est la traduction de l'équation $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, ou de l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, qui est la même que la précédente, en mettant dans celle-ci à la place de $\frac{m}{2a}$ sa valeur $\frac{bb}{aa}$.

L'ellipse peut se construire ainsi : à l'extrémité E du premier axe AE (Fig. 52), élevez une perpendiculaire EK égale au second axe, et tirez KA ; sur AE, comme diametre, décrivez un demi-cercle ATE ; et ayant mené au diametre AE une infinité d'ordonnées perpendiculaires NP, portez PN de A en O ; par le point O élevez OH perpendiculaire à AE ; par le point H menez HM parallele à AE : le point M, placé sur PN, appartiendra à l'ellipse. Car, par la propriété du cercle, $(PN)^2 = AP \times PE = 2ax - xx$; et en vertu des triangles semblables AEK, AOH, on a, AE $(2a)$: EK $(2b)$ :: AO ou PN $[\surd(2ax - x^2)]$: OH ou PM $= \frac{b}{a}\surd(2ax - xx)$, valeur de l'ordonnée de l'ellipse correspondante à l'abscisse AP. D'où l'on voit qu'au moyen de cette construction on déterminera successivement tant de points qu'on voudra de l'ellipse.

101. *Corollaires. I.* Les quarrés des ordonnées au premier axe de l'ellipse (Fig. 51) sont entre eux comme les produits des parties correspondantes du même axe. Car, puisqu'on a $yy = \frac{m}{2a}(2ax - xx)$, ou $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$; il est clair que $\frac{m}{2a}$ ou $\frac{bb}{aa}$ étant une quantité constante, les yy suivent la raison des $2ax - xx$, ou des AP × PE.

II. Si, au lieu de supposer AP $= x$, on suppose CP $= x$, en gardant les mêmes dénominations pour les autres lignes ;

il est évident qu'à cause de $AP \times PE = (CA)^2 - (CP)^2$ (Géom. 205), nous aurons $yy = \frac{m}{2a}(aa - xx)$, ou $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, équation de l'ellipse, en prenant l'origine des abscisses au centre de cette courbe.

III. Si nous nommons n le parametre du second axe de l'ellipse, nous aurons (99) $n = \frac{4aa}{2b}$, ou $aa = \frac{bn}{2}$. Mettons cette valeur de aa dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, et nous aurons $yy = \frac{2b}{n}(\frac{bn}{2} - xx)$; d'où l'on tire $xx = \frac{n}{2b} \times (bb - yy)$, ou $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$, en mettant pour $\frac{n}{2b}$ sa valeur $\frac{aa}{bb}$. Or, si du point M nous tirons MQ perpendiculaire à BD, il est clair que $MQ = x$, $CQ = y$, $BQ \times QD = (CB)^2 - (CQ)^2 = bb - yy$. Ainsi le quarré de l'ordonnée MQ au second axe BD est au produit $BQ \times QD$ des parties de cet axe, comme le parametre n de cet axe est au même axe $2b$, ou comme le quarré aa de la moitié du premier axe est au quarré bb de la moitié du second.

On voit par-là que la propriété primordiale de l'ellipse est la même par rapport à ses deux axes.

102. Problème I. *Trouver l'expression de la sous-tangente* PT (Fig. 53), *correspondante à la tangente* MT *et à l'ordonnée* MP *dans l'ellipse.*

Menons par le point M la sécante OMN, et la droite MH, parallele à l'axe AE, et terminée par l'ordonnée NV.

Supposons
- AE . . . . . $= 2a$,
- BD . . . . . $= 2b$,
- CP. . . . . $= x$,
- PM . . . . . $= y$,
- MH . . . . . $= z$,
- NH . . . . . $= u$,
- PO. . . . . $= s$.

Les triangles semblables OPM, MHN, donnent OP (s) : PM (y) :: MH (z) : NH (u) $= \frac{zy}{s}$. Or (100) on a $yy = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$, et $(y+u)^2 = \frac{bb}{aa}.[aa - (x-z)^2]$, ou $yy + 2yu + uu = \frac{bb}{aa}(aa - xx + 2xz - zz)$. Retranchons la premiere de ces équations de la seconde, nous aurons $2uy + uu = \frac{bb}{aa}(2xz - zz)$. Substituant dans cette derniere équation pour u sa valeur $\frac{zy}{s}$, on trouvera $\frac{2zyy}{s} + \frac{zyy}{ss} = \frac{bb}{aa}(2xz - zz)$, ou bien $\frac{2yy}{s} + \frac{zyy}{ss} = \frac{bb}{aa}(2x - z)$.

Supposons maintenant que z devienne zéro ; PO deviendra la sous-tangente PT, et l'équation précédente se réduira à celle-ci $\frac{2yy}{s} = \frac{2bbx}{aa}$; d'où l'on tire $s = \frac{aayy}{bbx} = \frac{aa - xx}{x} = \frac{(a-x)(a+x)}{x} = \frac{AP \times PE}{CP}$. D'où l'on voit que la sous-tangente est quatrieme proportionnelle à l'abscisse CP, et aux deux parties AP, PE, de l'axe AE.

103. *Corollaires. I.* La distance du centre C au point T, où la tangente va couper l'axe prolongé, c'est-à-dire CT, a pour expression $\frac{aa}{x}$, puisque $CT = CP + PT = x + \frac{aa - xx}{x}$, qui se réduit à $\frac{aa}{x}$; et la droite $AT = CT - AC = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$.

II. La tangente TM, qui est égale à $\sqrt{[(PM)^2 + (PT)^2]}$. a pour expression,

$$\frac{\sqrt{[a^6 + (aa - bb)x^4 + (aabb - 2a^4)x^2]}}{ax}.$$

III. La sous-perpendiculaire $PR = \frac{(CB)^2 \times CP}{(AC)^2}$; car les triangles semblables PMT, PRM, donnent $TP\ (\frac{aa - xx}{x})$: PM (y) :: PM (y) : $PR = \frac{yyx}{aa - xx} = \frac{bbx}{aa}$.

IV. La perpendiculaire RM $= \sqrt{[(PR)^2 + (PM)^2]} = \frac{\sqrt{[b^4x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2]}}{a^2}$.

Toutes ces propriétés de l'ellipse relativement à l'axe AE ont également lieu relativement à l'axe BD.

104. Théorême II. *Si de l'une des extrémités* B (Fig. 54) *du petit axe de l'ellipse comme centre, avec un rayon égal à la moitié* AC *du grand axe, on décrit un arc de cercle qui rencontre cet axe aux points* F *et* f; *qu'ensuite d'un point quelconque* M *de la courbe on tire aux points* F *et* f *les droites* MF *et* Mf, *la somme de ces deux lignes, c'est-à-dire* MF + Mf, *sera constamment égale au grand axe* AE.

Menons l'ordonnée MP, et supposons AE $= 2a$, BD $= 2b$, CF $= c = \sqrt{(aa - bb)}$, CP $= x$, PM $= y$. La valeur de FP sera $c - x$, et elle seroit $x - c$ si le point P tomboit entre les points A et F. Dans l'un et l'autre cas on aura $(FP)^2 = cc - 2cx + xx$. Donc $(FM)^2 = (FP)^2 + (PM)^2 = cc - 2cx + xx + yy = cc - 2cx + xx + \frac{b^2}{a^2}(aa - xx) = \frac{aacc - 2aacx + aaxx + aabb - bbxx}{aa} = \frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa}$, en mettant pour bb sa valeur $aa - cc$. Donc $FM = \frac{aa - cx}{a}$. On trouvera semblablement $fM = \frac{aa + cx}{a}$. Donc $FM + fM = \frac{aa - cx + aa + cx}{a} = 2a$.

105. *Remarque.* De là suit une maniere fort simple de décrire l'ellipse par un mouvement continu. Prenez un fil dont la longueur soit égale au grand axe AE; fixez ses extrémités aux points donnés F et f; ensuite tendez ce fil par le moyen d'un style M, que vous ferez tourner autour des deux points F et f, jusqu'à ce qu'il soit revenu au point d'où il sera parti; la courbe que ce style décrira est une ellipse.

L'ellipse ainsi décrite est ce qu'on appelle l'*ovale du jardinier*.

Si le petit axe BD est donné de même que le grand axe

il faut prendre la distance Ff des deux points fixes F et f égale au double de $\surd$ [(AC)^2 — (CB)^2].

Les deux points F et f s'appellent les *foyers* de l'ellipse.

106. Théorème III. *Les angles* FMT, fMK (Fig. 55) *formés par la droite indéfinie* TMK, *qui touche l'ellipse au point* M, *et par les droites* MF, Mf, *menées de ce point aux deux foyers* F et f, *sont égaux entre eux.*

Menez l'ordonnée MP à l'axe AE, et des deux foyers les perpendiculaires FO, fK, sur la tangente. En nommant AC, a; CB, b; CF ou Cf, c; CP, x; on aura (103, n°. I) CT $= \frac{aa}{x}$, et par conséquent TF $=$ CT $-$ CF $= \frac{aa}{x} - c = \frac{aa-cx}{x}$, T$f$ $=$ TC $+$ Cf $= \frac{aa}{x} + c = \frac{aa+cx}{x}$. Donc TF : T$f$ :: $\frac{aa-cx}{x} : \frac{aa+cx}{x}$ :: $aa-cx : aa+cx$. D'un autre côté, ayant trouvé (104) FM $= \frac{aa-cx}{a}$, fM $= \frac{aa+cx}{a}$, on a, FM : fM :: $\frac{aa-cx}{a} : \frac{aa+cx}{a}$ :: $aa-cx : aa+cx$. Ainsi on aura TF : Tf :: FM : fM. Mais, à cause des triangles semblables TFO, TfK, on a TF : Tf :: FO : fK. Donc FM : fM :: FO : fK, et (FM)^2 : (fM)^2 :: (FO)^2 : (fK)^2; ce qui donne (FM)^2 : (fM)^2 :: (FM)^2 — (FO)^2 : (fM)^2 — (fK)^2 :: (MO)^2 : (MK)^2. Donc FM : fM :: MO : MK :: FO : fK. Ainsi les deux triangles rectangles FOM, fKM, ont les côtés proportionnels, et sont par conséquent semblables. Donc l'angle FMT $=$ l'angle fMK.

On voit par-là que si un atome, partant de l'un F des foyers, va frapper l'ellipse en un point quelconque M, et se réfléchit sous un angle égal à celui d'incidence, il ira passer par l'autre foyer. C'est ce qui a fait donner le nom de *foyers* aux deux points F et f qui ont cette propriété.

107. *Corollaire.* La perpendiculaire MR, menée au point M sur la tangente, divise en deux parties égales l'angle FMf, formé par les deux droites tirées du point M aux deux foyers; car, retranchant des angles droits RMO, RMK,

les angles égaux FMO, fMK, resteront les angles égaux RMF, RMf.

108. Théorême IV. *Le produit* FO × fK *des deux perpendiculaires abaissées des deux foyers de l'ellipse sur la tangente est constamment égal au quarré de la moitié du second axe.*

Menez du point M la perpendiculaire RM à la tangente. On aura (103, n°. III et IV) $PR = \frac{b^2 x}{a^2}$, $(RM)^2 = \frac{b^2}{a^4} \times (b^2 x^2 + a^4 - a^2 x^2) = \frac{b^2}{a^4}(a^4 - c^2 x^2)$, en mettant dans le second facteur pour b^2 sa valeur $a^2 - c^2$. Et comme $a^4 - c^2 x^2 = (a^2 - cx) \times (a^2 + cx)$, et que $TF = \frac{a^2 - cx}{x}$, $Tf = \frac{a^2 + cx}{x}$; il est clair qu'on aura $(RM)^2 = \frac{b^2 x^2}{a^4} \times TF \times Tf$.

Cela posé, les triangles rectangles semblables PRM, OTF, KTf, donnent $RM : PR :: TF : FO = \frac{PR \times TF}{RM}$, $RM : PR :: Tf : fK = \frac{PR \times Tf}{RM}$. Donc $FO \times fK = (PR)^2 \times \frac{TF \times Tf}{(RM)^2} = \frac{b^4 x^2}{a^4} \times \frac{a^4}{b^2 x^2} = b^2$.

109. *Remarque.* Le produit FO × fK est constant; mais chacune des lignes FO × fK varie à mesure que le point M varie. Si on veut avoir les expressions particulieres de FO et de fK, on substituera dans les équations $FO = \frac{PR \times TF}{RM}$, $fK = \frac{PR \times Tf}{RM}$, à la place des lignes PR, RM, TF, Tf, leurs valeurs que nous avons trouvées.

110. Problême II. *Décrire une ellipse* (Fig. 56 et 57) *qui touche les côtés* VZ, Vz, *d'un angle donné* ZVz, *qui ait pour centre le point donné* C, *et pour l'un de ses axes une ligne donnée.*

Imaginons que AMEm soit l'ellipse cherchée, M et

les points d'attouchement avec les droites VZ, V*z*; C son centre, AE son grand axe, F et *f* ses deux foyers. Si du foyer *f* nous abaissons sur les tangentes VMZ, V*mz*, les perpendiculaires *f*OH, *fo*H, terminées par les droites FMH, F*mh*, menées par l'autre foyer et par les points M et *m*, il est clair qu'à cause de l'angle OMH, égal à l'angle FMV, et (106) de l'angle FMV, égal à l'angle *f*MZ, le triangle *f*MH est isoscele, ou qu'on a *f*M = MH. Semblablement on a *fm* = *mh*. Donc, à cause de MF + M*f* = AE = *m*F + *mf* (104), on aura FH = F*h*.

Le point C étant le milieu de F*f*, et les points O et *o* étant les milieux de *f*H et de *fh*, si on tire les droites CO, C*o*, ces lignes seront paralleles aux droites FH, F*h*, et seront par conséquent chacune la moitié de FH, ou de F*h*, ou de AE. Donc les points O, *o*, sont placés sur un arc de cercle décrit du centre donné C, avec un rayon égal à la moitié du grand axe de l'ellipse.

Maintenant supposons que la droite donnée XY doive être l'un des axes de l'ellipse. Du point C comme centre, avec un rayon égal à la moitié de XY, décrivez un arc de cercle : il pourra arriver deux cas ; ou cet arc coupera les côtés de l'angle donné ZV*z*, ou il ne les coupera point.

I. Cas. Si l'arc en question coupe les droites VZ, V*z* (Fig. 56), la droite XY sera le grand axe de l'ellipse, et la position de cet axe se déterminera ainsi. Du centre C, avec le rayon $\frac{XY}{2}$, décrivez un arc de cercle, que je suppose couper les droites VZ, V*z*, aux points O, *o*; par ces deux points menez perpendiculairement aux droites VZ, V*z*, les droites O*f*, *of*, qui se rencontrent en *f*: ce point *f* est un des foyers de l'ellipse ; en sorte que si par le centre C et par le point *f* on mene une ligne droite AE, le grand axe tombera sur cette ligne. Faisant CF = C*f*, le point F sera l'autre foyer, et le second axe sera exprimé par $2\sqrt{\left[\frac{(XY)^2}{4} - (CF)^2\right]}$, ou par $2\sqrt{[(AC)^2 - (CF)^2]}$. Connoissant les axes de grandeur

et de position, on a tout ce qui faut pour construire l'ellipse demandée.

II. Cas. Si l'arc dont nous avons parlé ne coupe pas les droites VZ, V*z*; alors (Fig. 57) la ligne donnée XY doit être prise pour le petit axe de l'ellipse, qui se construira ainsi. Du point C comme centre, avec un rayon égal à $\frac{XY}{2}$, décrivez un cercle BLDK; abaissez du même point C les perpendiculaires CR, C*r*, sur les droites VZ, V*z*; des points R et *r*, menez les tangentes RL, *rl*, au cercle; prenez sur CR la partie CG = RL, et sur C*r* la partie C*g* = *rl*; par les points G et *g*, menez parallèlement aux droites ZV, *z*V, les droites GF, *g*F, qui se rencontrent en F: ce point F est l'un des foyers de l'ellipse. En sorte que si on joint les points C et F par une ligne droite, le grand axe de l'ellipse tombera sur cette ligne; et ce même axe aura pour expression $2\sqrt{[(\frac{(XY)^2}{4} + (CF)^2]}$.

En effet, si, après avoir pris C*f* = CF, ce qui détermine le second foyer *f* de l'ellipse, nous abaissons du point *f* les perpendiculaires *f*O, *fo*, sur les tangentes, et que nous tirions les droites CO, C*o*, nous aurons $(CO)^2 = (CR)^2 + (RO)^2$, et $(Co)^2 = (Cr)^2 + (ro)^2$. Or, si on prolonge FG jusqu'à ce qu'elle rencontre *f*O en *q*, il est clair qu'à cause de C*f* = CF, on aura G*q* ou RO = GF. Semblablement *ro* = *g*F. Donc $(CO)^2 = (CR)^2 + (GF)^2 = (CR)^2 + (CF)^2 - (CG)^2$, et $(Co)^2 = (Cr)^2 + (gF)^2 = (Cr)^2 + (CF)^2 - (Cg)^2$. Et comme $(CG)^2$ ou $(LR)^2 = (CR)^2 - (CL)^2$, et $(Cg)^2$ ou $(lr)^2 = (Cr)^2 - (Cl)^2 = (Cr)^2 - (CL)^2$, il s'ensuit qu'on aura $(CO)^2 = (CL)^2 + (CF)^2$, et $(Co)^2 = (CL)^2 + (CF)^2$. Donc CO = C*o*; donc, par le premier cas, chacune des lignes égales CO, C*o*, est la moitié du grand axe de l'ellipse; les points F et *f* en sont les foyers, et le diametre BD du cercle tiré perpendiculairement à F*f* est le petit axe de l'ellipse. On a donc encore tout ce qu'il faut pour décrire cette courbe.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que le problème seroit impos-

sible si le point C étoit situé de maniere que la circonférence décrite de ce point avec le rayon $\frac{XY}{2}$ coupât ou touchât l'un des côtés de l'angle sans couper ou toucher l'autre côté; car alors XY ne pourroit être ni le grand ni le petit axe de l'ellipse.

Propriétés de l'ellipse par rapport à ses diametres.

111. On appelle *diametre* de l'ellipse (Fig. 58) toute droite qui passe par son centre C, et qui se termine de part et d'autre à sa circonférence. Telles sont les droites MK, OI, LR.

Si par l'une des extrémités M d'un diametre MK on mene une tangente à l'ellipse, le diametre LR parallele à cette tangente est appelé *diametre conjugué* au diametre MK.

Les droites VN, menées de tous les points de la circonférence de l'ellipse à un diametre MK parallèlement à la tangente MT qui passe par l'extrémité de ce diametre, sont appelées *ordonnées* à ce même diametre.

Une troisieme proportionnelle à un diametre et à son conjugué est le parametre du premier de ces diametres.

112. Théorême V. *Tout diametre* MK (Fig. 59) *de l'ellipse est divisé en deux parties égales au centre* C.

Cela est une suite évidente de ce que les quatre portions de l'ellipse BA, BE, [illegible]A, DE, sont parfaitement égales et semblables en tout. Si on en veut une démonstration en forme, on observera qu'en menant à l'axe AE les ordonnées MP, KH, les triangles rectangles semblables CPM, CHK, donnent $\frac{PM}{KH} = \frac{CP}{CH}$, ou $\frac{(PM)^2}{(KH)^2} = \frac{(CP)^2}{(CH)^2}$. Or (101, n°. II) $\frac{(PM)^2}{(KH)^2} = \frac{(CA)^2 - (CP)^2}{(CA)^2 - (CH)^2}$. Ainsi on aura $\frac{(CA)^2 - (CP)^2}{(CA)^2 - (CH)^2} = \frac{(CP)^2}{(CH)^2}$; d'où l'on tire $(CP)^2 = (CH)^2$, et $CP = CH$. Donc les deux triangles rectangles CPM, CHK, qui, outre les côtés homo-

logues égaux CP, CH, ont tous les angles égaux, sont parfaitement égaux, et par conséquent CM = CK.

113. Théorème VI. *Si par les extrémités* M *et* L (Fig. 60) *d'un diamètre* MK *et de son conjugué* LR, *on mène les deux ordonnées* MP, LQ, *à l'axe* AE, *la partie de l'axe comprise entre le centre et l'une des ordonnées sera moyenne proportionnelle entre les deux segments du même axe, déterminés par l'autre ordonnée; c'est-à-dire que* CQ *sera moyenne proportionnelle entre* AP *et* PE, *et* CP *moyenne proportionnelle entre* EQ *et* QA.

Menons la tangente MT; et nommons AC, a; CB, b; CP, x; CQ, z. On aura, par ce qui a été démontré, $PM = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, $LQ = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - zz)}$, $PT = \frac{aa - xx}{x}$. Les triangles semblables TPM, CQL, donnent $\frac{TP}{PM} = \frac{CQ}{QL}$, ou bien $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{x} = \frac{z}{\sqrt{(aa - zz)}}$; d'où l'on tire $zz = aa - xx$, ou $xx = aa - zz$. Ainsi on a, $(CQ)^2 = (CA)^2 - (CP)^2 =$ AP × PE, et $(CP)^2 = (CE)^2 - (CQ)^2 =$ EQ × QA.

114. Théorème VII. *Si, par l'extrémité* L (Fig. 61) *du diamètre* LR *conjugué au diamètre* MK, *on mène la tangente* ILH *à l'ellipse, cette tangente sera parallèle au diamètre* MK.

Soient PT, QI, les sous-tangentes qui correspondent respectivement aux ordonnées MP, LQ, menées des points M et L à l'axe AE. En gardant les dénominations de l'article précédent, nous aurons $PM = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$; $QL = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - zz)} = \frac{bx}{a}$ en mettant pour $\sqrt{(aa - zz)}$ sa valeur x; $PT = \frac{aa - xx}{x}$; $QI = \frac{aa - zz}{z} = \frac{xx}{\sqrt{(aa - xx)}}$. Donc $QI : QL :: \frac{xx}{\sqrt{(aa - xx)}} : \frac{bx}{a} :: x : \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} ::$ CP : PM. Donc les deux triangles rectangles IQL, CPM,

sont semblables ; et par conséquent IL est parallele à CM ou à KM.

115. *Corollaire.* Donc, si un diametre est parallele à la tangente menée par l'une des extrémités d'un autre diametre, cet autre diametre sera aussi parallele à la tangente menée par l'une des extrémités du premier. Ainsi ces deux diametres sont réciproquement conjugués l'un à l'autre.

Comme les tangentes OK, OR, menées par les deux autres extrémités K et R de nos deux diametres conjugués, sont aussi réciproquement paralleles à ces diametres, on voit que le quadrilatere VHZO, qui a pour côtés les quatre tangentes menées par les extrémités de deux diametres conjugués, est un parallélogramme. Il est composé des quatre parallélogrammes égaux CLHM, CLVK, CRZM, CROK.

116. Théorême VIII. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* VN (Fig. 62) *au diametre* MK *d'une ellipse est au produit* MN × MK *des parties de ce diametre, comme le quarré du demi-diametre conjugué* CL *est au quarré du demi-diametre* CM, *ou comme le parametre du diametre* MK *est au même diametre.*

Des points M, L, V, menez à l'axe les ordonnées perpendiculaires MP, LQ, VS; et, par le point N, NZ perpendidulaire à VS, et NY perpendiculaire à CA.

Supposons
- AC. . . . . $= a$,
- CB. . . . . $= b$,
- CP. . . . . $= x$,
- CM . . . . . $= f$,
- CL . . . . . $= g$,
- CN . . . . . $= s$,
- VN . . . . . $= t$,
- CQ . . . . . $= z$,
- le parametre du diametre. . . . . $= k$.

On aura (113) $zz = aa - xx$, et par conséquent $PM = \frac{bz}{a}$, $QL = \frac{bx}{a}$.

Les triangles semblables PCM, CYN, donnent

$$\text{CM}\,(f) : \text{PM}\,(\tfrac{bz}{a}) :: \text{CN}\,(s) : \text{NY} = \tfrac{bsz}{af},$$

$$\text{CM}\,(f) : \text{CP}\,(x) :: \text{CN}\,(s) : \text{CY} = \tfrac{sx}{f}.$$

Et les triangles semblables CQL, NZV, donnent

$$\text{CL}\,(g) : \text{CQ}\,(z) :: \text{VN}\,(t) : \text{NZ} = \tfrac{tz}{g},$$

$$\text{CL}\,(g) : \text{LQ}(\tfrac{bx}{a}) :: \text{VN}(t) : \text{VZ} = \tfrac{btx}{ag}.$$

Donc $\text{VS} = \text{VZ} + \text{ZS} = \text{VZ} + \text{NY} = \tfrac{btx}{ag} + \tfrac{bsz}{af}$, $\text{CS} = \text{NZ} - \text{CY} = \tfrac{tz}{g} - \tfrac{sx}{f}$. Or (100) $(\text{VS})^2 = \tfrac{(\text{CB})^2}{(\text{CA})^2} \times [(\text{CA})^2 - (\text{CS})^2]$. Donc, en mettant pour les lignes leurs valeurs analytiques, et effaçant les termes qui se détruisent, on aura $\tfrac{b^2 f^2 x^2}{g^2} + \tfrac{b^2 s^2 z^2}{f^2} = a^2 b^2 - \tfrac{b^2 t^2 z^2}{g^2} - \tfrac{b^2 s^2 x^2}{f^2}$, ou bien (en mettant pour x^2 sa valeur $a^2 - z^2$ et réduisant), $t^2 = \tfrac{g^2}{f^2} \times (f^2 - s^2)$; équation d'où l'on tire, 1°. $t^2 : f^2 - s^2 :: g^2 : f^2$, c'est-à-dire $(\text{VN})^2 : \text{MN} \times \text{NK} :: (\text{CL})^2 : (\text{CM})^2$.

2°. $t^2 : f^2 - s^2 :: k : 2f$, parceque k étant (111) une troisieme proportionnelle à $2f$ et à $2g$, on a $\tfrac{k}{2f} = \tfrac{g^2}{f^2}$. Cette proportion est la même chose que celle-ci, $(\text{VN})^2 : \text{MN} \times \text{NK} :: k : \text{MK}$.

117. *Corollaires. I.* En comparant les équations $t^2 = \tfrac{k}{2f}(f^2 - s^2)$, $t^2 = \tfrac{g^2}{f^2}(f^2 - s^2)$, avec les équations $yy = \tfrac{m}{2a}(a^2 - x^2)$, $yy = \tfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, qui se rapportent aux deux axes, on voit que, relativement aux rapports qui existent entre les quarrés des ordonnées et les produits correspondants des abscisses, les propriétés de l'ellipse sont les mêmes pour deux diametres conjugués quelconques que pour les deux axes.

II. Si par le point V on mene à l'ellipse la tange

qui rencontre en t le diametre KM prolongé, on trouvera, en employant la propriété pour les diametres, comme on a employé (102 et 103, n°. I) la propriété pour les axes, que la sous-tangente Nt a pour valeur $\frac{f^2-s^2}{s}$; que la droite Ct comprise entre le centre et le point t, a pour valeur $\frac{f^2}{s}$; et que la partie tM a pour valeur $\frac{f^2-fs}{s}$.

118. Théorême IX. *La somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des axes, ou, ce qui revient au méme, la somme des quarrés des deux demi-diametres conjugués* CM, CL (Fig. 60), *est égale à la somme des quarrés des deux demi-axes* CA, CB.

Ayant mené les ordonnées MP, LQ, perpendiculaires à l'axe AE, et nommant AC, a; CB, b; CP, x; nous aurons $(PM)^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, $(CM)^2=(CP)^2+(PM)^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x)^2$, $(CQ)^2=a^2-x^2$, $(QL)^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$, $(CL)^2=(CQ)^2+(QL)^2=a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}$. Donc $(CM)^2+(CL)^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+a^2-x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=bb+aa$.

119. Théorême X. *Le parallélogramme fait autour de deux diametres conjugués est égal au rectangle fait autour des deux axes; ou, ce qui revient au méme, le parallélogramme* CMHL (Fig. 63), *fait autour des deux demi-diametres conjugués* CM, CL, *est égal au rectangle* CAXB *fait autour des deux demi-axes* CA, CB.

Menez à l'axe AE les ordonnées perpendiculaires MP, LQ; et du point L la perpendiculaire LS sur le diametre MK. Soit T le point de concours de HM prolongée avec CA aussi prolongée. Nommons CA, a; CB, b; CP, x; PM, y; TM, t; CM, f; CL, g; le sinus total 1: on aura $CT=\frac{aa}{x}$;

QL $= \frac{bx}{a}$; et, à cause des triangles semblables CQL, TPM, $t = \frac{\text{CL} \times \text{PM}}{\text{QL}} = \frac{agy}{bx}$.

Cela posé, le triangle rectangle TPM donne TM (t) : PM (y) :: 1 : sin. MTP $= \frac{y}{t}$; et le triangle CMT donne CM (f) : CT ($\frac{aa}{x}$) :: sin. CTM ($\frac{y}{t}$) : sin. CMT $= \frac{a^2 y}{fx}$. Donc l'angle LCS, qui est égal au supplément de l'angle CMT, a également pour sinus $\frac{a^2 y}{fx}$. Le triangle rectangle CSL donne, 1 : sin. LCS ($\frac{a^2 y}{fx}$) :: CL (g) : LS $= \frac{a^2 gy}{fx}$. Donc CM $\times$ LS, ou l'aire du parallélogramme CMHL, $= f \times \frac{a^2 gy}{fx} = \frac{a^2 gy}{tx} = ab$ (en mettant pour t sa valeur $\frac{agy}{bx}$) = le rectangle CA $\times$ CB.

120. Théorème XI. *Si de l'extrémité* M (Fig. 64) *d'un diametre* MK *on mene à l'un* f *des foyers la droite* Mf *qui rencontre en* Z *le diametre conjugué* LR, *la partie* MZ *de cette ligne sera constamment égale à la moitié* CA *du grand axe.*

Menez la tangente MT, et l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AE. En nommant toujours AC, a; CB, b; CP, x; on aura CT $= \frac{aa}{x}$, T$f = \frac{aa + cx}{x}$, M$f = \frac{aa + cx}{a}$.

Cela posé, à cause des paralleles MT, LC, on a Tf ($\frac{aa+cx}{x}$) : Mf ($\frac{aa+cx}{a}$) :: TC ($\frac{aa}{x}$) : MZ $= a$.

121. Problème III. *Connoissant de grandeur et de position deux diametres conjugués* MK, LR (Fig. 65), *déterminer les axes* AE, BD, *de l'ellipse.*

Nommons CA, a; CB, b; CM, f; CL, g; le sinus total 1; le sinus de l'angle LCM ou de l'angle LCS, n. La perpendiculaire LS, abaissée de l'extrémité L du diametre LR sur le diametre MK, aura pour expression $\frac{ng}{1}$ ou ng.

Cela posé, on a (118 et 119) ces deux équations $aa + bb = ff + gg$, $ab = nfg$. Donc $aa + bb + 2ab = ff + gg + 2nfg$, et $aa + bb - 2ab = ff + gg - 2nfg$; et, en tirant les racines quarrés,

$$a + b = \surd(ff + gg + 2nfg),$$
$$a - b = \surd(ff + gg - 2nfg).$$

Ajoutant ensemble ces deux équations, puis retranchant la seconde de la premiere, on trouvera

$$2a = \surd(ff + gg + 2fng) + \surd(ff + gg - 2nfg),$$
$$2b = \surd(ff + gg + 2fng) - \surd(ff + gg - 2nfg).$$

Ainsi les deux axes sont connus de grandeur. Je détermine leurs expressions linéaires et leur position par cette construction.

Prolongez SL de la quantité LG = CM, et tirez GC; cette ligne sera la valeur du premier radical, puisqu'on a (Géom. 206) $(GC)^2 = (GL)^2 + (LC)^2 + 2GL \times LS = ff + gg + 2f \times ng$. Prenez $LSg = CM$, et tirez Cg; cette ligne sera la valeur du second radical, puisqu'on a (Géom. 209), $(Cg)^2 = (CL)^2 + (Lg)^2 - 2Lg \times LS = gg + ff - 2f \times ng$. Donc, si du point C comme centre, avec le rayon Cg, on décrit un cercle pgh, qui rencontre en p et h la droite GC, la droite Gp sera égale au grand axe de l'ellipse, et la droite Gh égale au petit axe.

Divisez Gp en deux parties égales au point q; sur Gq comme diametre, décrivez un demi-cercle Grq; inscrivez dans ce demi-cercle la corde Gr égale à la moitié de Gh, et tirez l'autre corde rq. Cette seconde corde sera égale à la distance du centre de l'ellipse à l'un des foyers, puisque le triangle rectangle Grq donne $(rq)^2 = (Gq)^2 - (Gr)^2$; ce qui est l'expression du quarré de la distance dont je viens de parler.

Maintenant, pour déterminer la position des axes, du point M comme centre, avec un rayon égal à Gq, ou à $\frac{Gp}{2}$, décrivez un arc de cercle qui coupe CL au point Z; tirez la droite MZf indéfinie : le foyer opposé au point M doit se trouver sur cette ligne (120). Du centre C, avec un rayon égal à rq, décrivez un arc de cercle qui coupe MZf au point f: ce point

f est le foyer dont il s'agit. En sorte que si par les points C et f on tire une ligne droite AE, le grand axe de l'ellipse tombera sur cette ligne ; et si par le centre C on éleve BD perpendiculaire à AE, le petit axe tombera sur cette ligne BD. Les extrémités de ces axes se détermineront en faisant chacune des lignes CA, CE, égale à Gq, et chacune des lignes CB, CD, égale à Gr.

122. *Remarque.* On voit par les mêmes équations $aa + bb = ff + gg$, $ab = nfg$, que si l'on connoissoit les axes et l'une des trois quantités f, g, n, on pourroit déterminer les deux quantités inconnues.

123. Théorême XII. *Deux ellipses* ABED, abed (Fig. 66 et 67), *sont semblables lorsque leurs axes ou demi-axes homologues sont proportionnels, c'est-à-dire lorsqu'on a* AC : ac :: CB : cb.

La proposition sera démontrée, si l'on fait voir qu'en prenant les abscisses AP, ap, dans la raison des axes, les ordonnées PM, pm, seront aussi dans la même raison ; c'est-à-dire qu'en supposant qu'on ait AP : ap :: AC : ac :: CB : cb, on aura aussi PM : pm :: AC : ac :: CB : cb. Or (100), $(PM)^2 = \frac{(CB)^2}{(AC)^2}[(AC)^2 - (CP)^2]$, $(pm)^2 = \frac{(cb)^2}{(ac)^2}[(ac)^2 - (cp)^2]$. Donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: \frac{(CB)^2}{(AC)^2}[(AC)^2 - (CP)^2] : \frac{(cb)^2}{(ac)^2}[(ac)^2 - (cp)^2]$. Ainsi, à cause de $\frac{(CB)^2}{(AC)^2} = \frac{(cb)^2}{(ac)^2}$, on aura $(PM)^2 : (pm)^2 :: (AC)^2 - (CP)^2 : (ac)^2 - (cp)^2 :: AP \times PE : ap \times pe$. D'un autre côté, on a la proportion AP : ap :: AC : ac ; et, à cause de AE : ae :: AC : ac :: AP : ap, on a la proportion PE : pe :: AC : ac. Donc, en multipliant par ordre ces deux proportions, on aura $AP \times PE : ap \times pe :: (AC)^2 : (ac)^2$. Ainsi $(PM)^2 : (pm)^2 :: (AC)^2 : (ac)^2$; et, en tirant les racines quarrées, PM : pm :: AC : ac :: CB : cb.

SECTION III.

De l'Hyperbole.

124. L'équation de l'hyperbole est (72) $zz = C + \frac{Aqu}{p} + \frac{Bq^2u^2}{p^2}$. En opérant comme pour l'ellipse (96), on transformera cette équation en celle-ci, $yy = Mx + Nx^2$, M et N étant des quantités données, x et y des coordonnées perpendiculaires entre elles, dont l'origine est un point de la courbe. Cette équation devient encore $yy = \frac{m}{2a}(2ax + xx)$, en supposant $m = M$, $N = \frac{m}{2a}$; et maintenant l'équation est homogene, et chacune des lettres m, $2a$, x, y, représente une ligne.

125. Soit (Fig. 68) l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée perpendiculaire PM $= y$. D'abord, l'origine A des coordonnées est un point de la courbe, puisque l'équation $yy = \frac{m}{2a} \times (2ax + xx)$ donne $y = 0$, lorsque $x = 0$. Sans faire aucun calcul particulier, nous voyons, par cette même équation, qu'à chaque x positive répondront toujours deux ordonnées égales, l'une PM, positive, l'autre Pm, négative; et qu'à mesure que x augmentera, les ordonnées augmenteront, en sorte que si x devient infinie, elles deviendront aussi infinies. Donc du côté des x positives, la courbe a deux branches AM, Am, égales et semblables, qui s'étendent à l'infini, l'une au-dessus de l'axe AZ des abscisses, l'autre au-dessous.

Faisons maintenant x négative. Tant que $-x$ sera moindre que $2a$, la valeur de y sera imaginaire. Mais si l'on fait $-x = 2a =$ AE (en supposant que AE soit la ligne que représente $2a$), on aura $y = 0$. Donc l'extrémité E de la

droite AE est un point de la courbe. En donnant toujours à $-x$ des valeurs plus grandes que $2a$, on trouvera, du côté des x négatives, deux nouvelles branches infinies EN, En, égales et semblables, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des abscisses. De plus, ces deux branches sont parfaitement égales aux deux premieres AM, Am. Car si l'on suppose d'abord $x = h$, et qu'on prenne ensuite $-x = 2a + h$, ce qui rendra évidemment les droites AP, EQ, égales entre elles; on trouvera, dans l'un et l'autre cas, $y = \pm \sqrt{[\frac{m}{2a}(2ah + hh)]}$. Donc les quatre lignes PM, Pm, QN, Qn, sont égales entre elles. Ainsi la courbe entiere est composée de quatre branches infinies, égales et semblables, AM, Am, EN, En.

Lorsqu'on ne considere que la partie MAm, ou NEn, située à droite ou à gauche de l'origine A, cette partie s'appelle simplement *hyperbole;* mais si l'on considere tout à-la-fois les parties MAm, NEn, ces deux parties s'appellent *hyperboles opposées*. Sur quoi il faut se souvenir que ces parties ne peuvent jamais exister réellement l'une sans l'autre, puisqu'elles sont également représentées par l'équation $yy = \frac{m}{2a}(2ax + xx)$.

Si les deux lignes représentées par m et $2a$ étoient égales, ou qu'on eût $yy = 2ax + xx$, l'hyperbole seroit *équilatere;* espece d'hyperbole qui est à l'égard de l'hyperbole ordinaire ce que le cercle est à l'égard de l'ellipse en général.

126. On appelle la droite AE ($2a$) le *premier axe* de l'hyperbole; la ligne m, le *parametre* de cet axe.

Si par le point C, milieu de AE, et qu'on appelle le *centre* de l'hyperbole, on éleve la perpendiculaire BD, dont les parties CB, CD, sont égales, et qui soit moyenne proportionnelle entre $2a$ et m; cette droite BD s'appelle *second axe* de l'hyperbole. Ainsi, en nommant

$2b$, on a, $2a : 2b :: 2b : m$; et par conséquent $bb = \frac{am}{2}$, $\frac{bb}{aa} = \frac{m}{2a}$.

Le second axe a son parametre de même que le premier axe. Ce parametre est une troisieme proportionnelle au second axe et au premier; de sorte qu'en le nommant n, on a, $2b : 2a :: 2a : n$; et par conséquent $aa = \frac{bn}{2}$, $\frac{aa}{bb} = \frac{n}{2b}$.

127. Théorême I. *Le quarré de l'ordonnée* PM *au premier axe de l'hyperbole est au produit* AP × PE *des abscisses de cet axe, comme le parametre de cet axe est au même axe, ou comme le quarré de la moitié du second axe est au quarré de la moitié du premier.*

Cet énoncé est la traduction de l'équation $yy = \frac{m}{2a} \times (2ax + xx)$, ou de celle-ci $yy = \frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, qui est la même chose, en mettant pour $\frac{m}{2a}$ sa valeur $\frac{bb}{aa}$.

L'hyperbole peut se construire ainsi. Sur EP, comme diametre (Fig. 69), décrivez un demi-cercle EVP; élevez perpendiculairement à AE la droite AV, qui rencontre la demi-circonférence au point V, et tirez la corde PV; ensuite, ayant mené par les extrémités A et B des deux axes la droite indéfinie AY, portez la corde PV sur AE, de A en X; par le point X, élevez la perpendiculaire XY, qui rencontre en Y la droite ABY; faites l'ordonnée PM = XY : le point M sera un de ceux de l'hyperbole. Car, par la construction et par la propriété du cercle, on a, $PV = \surd(2ax + xx)$; et à cause des triangles semblables ACB, AXY, on a $XY = AX \times \frac{CB}{AC} = \frac{b}{a}\surd(2ax + xx) =$ PM $= y$.

Il est clair que par la même construction on trouvera tant de point qu'on voudra des deux hyperboles opposées.

128. *Corollaires. I.* Les quarrés des ordonnées au premier axe de l'hyperbole sont entre eux comme les produits AP × PE des abscisses.

II. Si au lieu de supposer AP = x, on suppose CP = x, en gardant toutes les autres dénominations; on aura AP × PE = $(x-a) \times (x+a) = xx - aa$. Donc, $yy = \frac{m}{2a} \times (xx - aa)$, ou $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, équation de l'hyperbole, en prenant l'origine des abscisses au centre de cette courbe.

III. L'équation $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ donne $xx = \frac{aa}{bb} \times (yy + bb)$, ou $xx = \frac{n}{2b}(yy + bb)$, en mettant pour $\frac{aa}{bb}$ sa valeur $\frac{n}{2b}$. Ce qui nous apprend que si d'un point M de l'hyperbole on mene au second axe BD, prolongé s'il est nécessaire, la perpendiculaire ou ordonnée MH, le quarré de cette ordonnée est à la somme des quarrés du demi second axe, et de l'abscisse CH prise sur le second axe, comme le quarré de la moitié du premier axe est au quarré de la moitié du second, ou comme le parametre du second axe est à ce même axe. Ainsi, la propriété de l'hyperbole, par rapport au second axe, n'est pas tout-à-fait la même que par rapport au premier.

129. Problème I. *Trouver l'expression de la sous-tangente* PT (Fig. 70), *qui correspond à la tangente* MT *et à l'ordonnée* MP.

En employant l'équation caractéristique de l'hyperbole, $(PM)^2 = \frac{(CB)^2}{(CA)^2} \times [(CP)^2 - (CA)^2]$, exactement de la même maniere qu'on a employé (102) l'équation analogue de l'ellipse, on trouvera, PT $= \frac{xx - aa}{x} = \frac{AP \times PE}{CP}$. Ainsi la

sous-tangente PT est quatrieme proportionnelle à l'abscisse CP et aux parties AP, PE, de l'axe.

130. *Corollaires. I.* La distance du centre C au point T, où la tangente coupe le premier axe, c'est-à-dire $CT = \frac{aa}{x}$, puisque $CT = CP - PT = x - \frac{(xx-aa)}{x} = \frac{aa}{x}$. Et la partie $AT = AC - TC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax-aa}{x}$.

II. La tangente $TM = \surd\left[\frac{bb}{aa}(xx-aa) + \frac{(xx-aa)^2}{xx}\right]$.

III. La sous-perpendiculaire $PR = \frac{bbx}{aa}$.

IV. La perpendiculaire $RM = \surd\left[\frac{bb}{aa}(xx-aa) + \frac{b^4x^2}{a^4}\right]$.

131. *Remarque.* On voit, par l'expression de la partie CT de l'axe comprise entre le centre C et l'origine T de chaque sous-tangente, pour la courbe hyperbolique MA*m*, que cette partie diminue sans cesse à mesure que x augmente. Lorsque x devient infinie, CT devient zéro, parcequ'une fraction dont le dénominateur devient infini, le numérateur demeurant fini, est infiniment petite, et peut être censée zéro.

Ainsi toutes les tangentes à la courbe hyperbolique MA*m* partent nécessairement de quelque point situé sur CA. Et de même, toutes les tangentes à l'hyperbole opposée NE*n* partent de quelque point de CE.

Parmi ces tangentes, celles CV, CS, C*u*, C*s*, (Fig. 71), qui, partant du centre C, vont toucher à l'infini, ou peuvent être censées aller toucher à l'infini, les hyperboles opposées, sont appelées les *asymptotes* de ces hyperboles. Ces quatre asymptotes ne forment que deux lignes droites, parceque CV et C*u* sont en ligne droite, de même que CS et C*s*.

L'hyperbole a, par rapport à ses asymptotes, plusieurs propriétés que nous allons examiner.

132. Théorême II. *Les asymptotes* CV, CS, *sont paralleles aux droites* AD, AB, *tirées du sommet* A *de l'hyperbole aux extrémités* D, B, *du second axe* BD.

Par le point A, élevez sur AE la perpendiculaire AX qui rencontre en X l'asymptote CV. Il est clair que le triangle rectangle CAX sera semblable au triangle rectangle qui auroit pour côté l'abscisse, comptée du centre C, qui répond au point infiniment éloigné où l'asymptote va toucher l'hyperbole, l'ordonnée correspondante, et l'asymptote. Ainsi on aura, CA : AX :: $x : \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$. Mais x étant infinie, aa est nul par rapport à xx; et par conséquent $\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$ se réduit à $\frac{bx}{a}$. Donc, CA : AX :: $x : \frac{bx}{a}$ :: $a : b$ :: CA : CD. Donc AX = CD; et par conséquent CX ou CV est parallele à AD. On démontrera de même que CS est parallele à AB.

133. *Corollaires. I.* Donc l'asymptote CV divise la droite BA, de maniere que les trois lignes AH, HC, HB, sont égales entre elles. Car, 1°. CV étant parallele à AD, l'angle HCA = l'angle CAD = l'angle CAB. Donc le triangle HAC est isoscele, et par conséquent AH = HC. 2°. L'angle BCH = l'angle CDA = l'angle CBH. Donc le triangle HBC est isoscele, et par conséquent HC = HB. Ainsi les trois lignes AH, HC, HB, sont égales.

II. Si CB est plus petit que CA, l'angle VCS, formé par les asymptotes, sera aigu; si CB > CA, cet angle sera obtus; et si CB = CA, ou, ce qui revient au même, si l'hyperbole est équilatere, l'angle en question sera droit.

134. Théorême III. *Si l'on mene perpendiculairement à l'axe* EAP (Fig. 72) *la droite* RMr, *qui se termine de part et d'autre aux asymptotes, et qui rencontre l'axe en* P *et l'hyperbole aux points* M *et* m; *le produit* RM × Mr,

ou mr × mR, *sera toujours égal au quarré de la moitié du second axe* CB.

Soient CA = a, CB = b, CP = x, PM = y. Les triangles semblables ACB, CPR, donnent CA (a) : CB (b) :: CP (x) : PR = $\frac{bx}{a}$. Donc RM = PR − PM = $\frac{bx}{a} - y$, et Mr = PR + PM = $\frac{bx}{a} + y$. Ainsi RM × Mr = $(\frac{bx}{a} - y) \times (\frac{bx}{a} + y) = \frac{b^2x^2}{a^2} - yy$. Mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa}(xx - aa)$, on aura, RM × Mr = $\frac{bbxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa} + \frac{aabb}{aa} = bb$.

On observera qu'à mesure que l'abscisse CP augmente, la droite RM diminue, et la droite Mr augmente. Lorsque x devient infinie, MR devient infiniment petite, Mr devient infinie ; et alors le produit d'une ligne infiniment petite par une ligne infinie se trouve toujours égal au quarré de la ligne finie CB.

135. Théorême IV. *Si l'on mene par deux points quelconques* M *et* X *de l'hyperbole deux paralleles quelconques* Gg, Ll, *qui se terminent aux deux asymptotes ; les produits* GM × Mg, LX × Xl, *seront égaux entre eux.*

Menez, par les points M et X, les droites Rr, Kk, perpendiculaires à l'axe, et terminées aux asymptotes. Les triangles semblables GMR, LXK, et gMr, lXk, donneront ces deux proportions, RM : KX :: GM : LX ; Mr : Xk :: Mg : Xl ; lesquelles étant multipliées par ordre donnent, RM × Mr : KX × Xk : GM × Mg : LX × Xl. Or, les deux produits RM × Mr, KX × Xk, sont égaux, puisque chacun d'eux est égal à (CB)^2. Donc aussi GM × Mg = LX × Xl.

136. Théorême V. *Si d'un point* M *de l'hyperbole on mene à l'asymptote* CV *la droite* MI *parallele à l'autre*

asymptote; le produit des deux lignes CI, IM, *sera égal au quarré de la ligne* CH.

A cause des paralleles IM, C*r*, on a, RI : RM :: IC : M*r*. Donc $Mr = \frac{RM \times IC}{RI}$; ou bien (en mettant pour M*r* sa valeur $\frac{(CB)^2}{RM}$ (134)), $\frac{(CB)^2}{RM} = \frac{RM \times IC}{RI}$, ou $(CB)^2 = \frac{(RM)^2 \times IC}{RI}$. Le triangle RIM est isoscele et semblable au triangle CHB. Donc RM : CB :: RI : CH; et par conséquent $CB = \frac{RM \times CH}{RI}$, et $(CB)^2 = \frac{(RM)^2 \times (CH)^2}{(RI)^2}$. Egalant entre elles les deux valeurs de $(CB)^2$, on aura $\frac{(RM)^2 \times IC}{RI} = \frac{(RM)^2 \times (CH)^2}{(RI)^2}$; ce qui donne $RI \times IC = (CH)^2$, ou bien (en mettant IM pour RI), $IM \times IC = (CH)^2$.

137. *Corollaire.* Donc, si l'on suppose $IC = u$, $IM = z$, $CH = g$; on aura $uz = gg$, équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Le quarré g^2, qui est la même chose que le produit des deux lignes égales CH, HA, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

Il est clair que la puissance de l'hyperbole est égale au quart de la somme des quarrés des deux demi-axes CA, CB; puisque, CH étant la moitié de AB, on a $(CH)^2 = \frac{(AB)^2}{4} = \frac{(CA)^2 + (CB)^2}{4}$.

138. Théorême VI. *Si du centre* C *de l'hyperbole* (Fig. 73), *avec un rayon égal à l'hypoténuse* AB *du triangle rectangle* ACB, *qui a pour côtés contigus à l'angle droit les deux demi-axes, on décrit un cercle qui coupe le premier axe aux points* F *et* f *qu'on appelle* foyers; *qu'ensuite d'un point quelconque* M *de l'hyperbole on mene à ces points les droites* MF, Mf; *la différence de ces deux lignes, c'est-à-dire* Mf — MF, *sera constamment égale au premier axe* AE.

La démonstration se fait comme pour l'ellipse (104), en observant que si l'on fait CA $= a$, CB $= b$, AB $= \sqrt{(aa+bb)} = c$, CP $= x$; on a ici M$f = \frac{cx+aa}{a}$, MF $= \frac{cx-aa}{a}$; d'où résulte Mf — MF $= 2a$.

On remarquera que dans l'ellipse les foyers sont toujours placés sur le grand axe; au lieu que dans l'hyperbole l'axe sur lequel les foyers sont placés peut être moindre que le second axe.

139. *Remarque.* De là suit un moyen de décrire l'hyperbole par un mouvement continu.

Ayant déterminé (Fig. 74) la grandeur des axes AE, BD, et la position des deux foyers F, et f, prenez une regle fG et un fil GMF, de maniere que la longueur de la regle surpasse la longueur du fil, d'une quantité égale au premier axe AE; fixez l'extrémité f de la regle au point f, tellement qu'elle puisse tourner autour de ce point comme gond; attachez l'une des extrémités du fil au bout G de la regle, et l'autre extrémité au foyer F; faites en sorte, au moyen d'un style mobile M, que la partie GM du fil demeure toujours appliquée contre la regle. Cela posé, si vous faites tourner la regle autour du point f, le style M décrira la portion AM de l'hyperbole. Et en plaçant l'instrument de l'autre côté, on décrira l'autre branche Am. L'hyperbole opposée NEn se décrira de la même maniere, en faisant tourner la regle autour du point F, comme gond.

Il est clair que cette construction donne, en effet, pour tous les lieux des points M, le périmetre d'un hyperbole, puisque la différence des lignes menées de chaque point M aux deux foyers est constamment égale au premier axe AE.

140. Théorême VII. *Les angles* FMT, fMT (Fig. 75), *que fait la tangente* MT *avec les droites* MF, Mf, *me-*

nées du point M *de contingence aux deux foyers, sont égaux entre eux.*

Même démonstration que pour l'ellipse (106), en observant qu'ici $MF = \frac{cx - aa}{a}$, $Mf = \frac{cx + aa}{a}$, $TF = \frac{cx - aa}{x}$, $Tf = \frac{cx + aa}{x}$.

On voit par-là qu'un atome, partant du foyer f, et allant frapper l'hyperbole au point M, se réfléchira suivant une ligne dont le prolongement passera par l'autre foyer F; et réciproquement. C'est cette propriété qui a fait donner le nom de *foyers* aux points F et f.

141. Théorême VIII. *Si des deux foyers* F *et f on abaisse les deux perpendiculaires* FO, fK, *sur la tangente, le produit* FO $\times f$K *de ces deux lignes sera constamment égal au quarré de la moitié du second axe.*

Même démonstration que pour l'ellipse (108); et on pourra déterminer chacune des lignes FO, fK, comme (109).

Propriétés de l'hyperbole par rapport à ses diametres.

142. On appelle *diametre principal* de l'hyperbole toute droite MK (Fig. 76) qui passe par le centre C, et qui rencontre de part et d'autre les hyperboles opposées; et *diametre conjugué* au diametre MK, la droite LR parallele à la tangente MT, et terminée par les droites ML, KR, menées parallèlement à la droite AB qui joint deux extrémités des deux axes, et qui est placé du même côté que le point M. On dit aussi que le diametre MK est conjugué au diametre LR.

Une ligne droite menée d'un point de l'hyperbole à un diametre, parallèlement au diametre conjugué, s'appelle *ordonnée* au premier de ces diametres. Ainsi VH, ou uH, est une ordonnée au diametre MK.

Une troisieme proportionnelle à deux diametres conjugués

est le parametre du diametre, qui est le premier terme de la proportion.

143. Théorême IX. *Tout diametre de l'hyperbole est divisé en deux parties égales au centre* C.

D'abord on démontrera, comme pour l'ellipse (112), que le diametre principal MK est divisé en deux parties égales au centre C. Ensuite on verra que le diametre conjugué LR est aussi divisé en deux parties égales au point C, puisque les deux triangles CML, CKR, qui ont tous les angles égaux, ont de plus les côtés CM, CK égaux; d'où résulte CL = CR.

144. Théorême X. *Si des extrémités* M *et* L *d'un diametre principal* MK *et de son conjugué* LR, *on mene à l'axe* AE *les perpendiculaires* MP, LQ, *la partie* CQ *qui répond au diametre secondaire sera moyenne proportionnelle entre les abscisses* AP *et* PE *correspondantes au diametre principal.*

Menez MO parallele à AE ou perpendiculaire à LQ. En nommant à l'ordinaire AC, a; CB, b; CP, x; et CQ, z; on aura PQ ou MO $= x - z$, PM $= \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$, la sous-tangente PT $= \frac{xx-aa}{x}$.

Les triangles semblables TPM, CQL, donnent PT $(\frac{xx-aa}{x})$: PM $(\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a})$ :: CQ (z) : QL $= \frac{bxz}{a\sqrt{(xx-aa)}}$; et les triangles semblables CBA, OLM, donnent AC (a) : CB (b) :: MO $(x-z)$: OL $= \frac{b(x-z)}{a}$. Donc QL = QO + OL = PM + OL $= \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a} + \frac{b(x-z)}{a}$. Egalant entre elles les deux valeurs de QL, on aura $\frac{bxz}{a\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a} + \frac{b(x-z)}{a}$, ou bien $xz = \sqrt{(xx-aa)} \times \sqrt{(xx-aa)} + (x-z)\sqrt{(xx-aa)}$; ou bien $z[x + \sqrt{(xx-aa)}] = \sqrt{(xx-aa)} \times [x + \sqrt{(xx-aa)}]$;

ou (en ôtant de part et d'autre le facteur commun et quarrant), $zz = xx - aa$, ou $(CQ)^2 = AP \times PE$.

145. Théorême XI. *Le diametre secondaire* LR *étant supposé conjugué au diametre principal* MK, *ou parallele à la tangente* MT, *menée par l'extrémité* M *de ce dernier, sera aussi parallele à la tangente menée par son autre extrémité* K *à l'hyperbole opposée.*

En effet, si l'on mene à l'axe AE les ordonnées perpendiculaires MP, KX, les deux triangles rectangles CPM, CXK, qui ont tous les angles égaux et des hypoténuses égales, sont parfaitement égaux. D'où il suit que les deux branches AM, EK, des hyperboles opposées, étant parfaitement égales et semblables, les deux triangles rectangles TPM, tXK, sont aussi parfaitement égaux, et que par conséquent les lignes TM, tK, sont paralleles.

146. *Corollaire.* Donc, si l'on mene (Fig. 77) par les extrémités L et R d'un diametre secondaire LR les droites OLH, IPG, paralleles au diametre principal et conjugué MK, lesquelles rencontrent en H, G, O, I, les tangentes TM, tK, prolongées, le quadrilatere HGOI, sera un parallélogramme. Ce parallélogramme est composé des quatre parallélogrammes égaux CMHL, CKOL, CMGR, CKIR.

147. Théorême XII. *Le quarré d'une ordonnée* VH (Fig. 78) *au diametre* MK *est au produit* MH × HK *ou* $(CH)^2 - (CM)^2$ *des abscisses de ce diametre, comme le quarré du demi-diametre conjugué* CL *est au quarré du demi-diametre* CM, *ou comme le parametre du diametre* MK *est à ce diametre.*

Même démonstration que pour l'ellipse (116).

148. *Corollaires. I.* Donc, si l'on nomme f le demi-diametre CM, g le demi-diametre conjugué CL, s l'abscisse CH, t l'ordonnée VH, k le parametre du diametre MK, on aura les équations $tt = \frac{gg}{ff}(ss - ff)$, $tt = \frac{k}{2f}(ss -$

ff), lesquelles, étant comparées avec les équations $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, $yy = \frac{m}{2a}(xx - aa)$, qui se rapportent aux axes, font voir que les propriétés de l'hyperbole, en ce qui regarde les rapports entre les quarrés des ordonnées et les produits des abscisses, sont les mêmes pour deux diametres conjugués que pour les deux axes.

II. Si par le point V, extrémité de l'ordonnée HV, on mene à l'hyperbole la tangente VS, qui rencontre en S le diametre MK, la sous-tangente HS, qui correspond à l'ordonnée HV, a pour expression $\frac{s^2 - f^2}{s}$; la partie CS, comprise entre le centre et le point S, a pour expression $\frac{f^2}{s}$; et la distance SM du point S à l'origine M du diametre MK a pour expression $\frac{fs - f^2}{s}$. Tout cela se démontrera en employant la propriété pour les diametres, comme on a employé la propriété pour les axes dans les cas semblables.

149. Théorême XIII. *La différence des quarrés des deux demi-diametres conjugués* CM, CL, *est égale à la différence des quarrés des demi-axes* CA, CB.

Même démonstration que pour l'ellipse (118), à cela près qu'au lieu d'ajouter les quantités $(CM)^2$ et $(CL)^2$, il faut retrancher l'une de l'autre; ce qui donne $(CM)^2 - (CL)^2 = (CA)^2 - (CB)^2$.

150. Théorême XIV. *Le parallélogramme fait autour de deux diametres conjugués est égal au rectangle fait autour des deux axes; ou, le parallélogramme* CMHL (Fig. 77) *fait autour des deux demi-diametres conjugués* CM, CL, *est égal au rectangle* CAVB *fait autour des deux demi-axes* CA, CB.

Même démonstration que pour l'ellipse (119).

151. Théorême XV. *Si de l'extrémité* M (Fig. 79) *du*

diametre principal MK *on mene au foyer* f *la droite* Mf, *qui rencontre en* Z *le diametre conjugué* LR, *la partie* MZ *de cette ligne sera constamment égale à la moitié* CA *du premier axe.*

Même démonstration que pour l'ellipse (120).

152. Problême II. *Connoissant de grandeur et de position deux diametres conjugués* MK, LR, *d'une hyperbole, déterminer ses axes.*

Nommons f et g les deux demi-diametres conjugués donnés CM, CL; n le sinus de l'angle MCL, qu'ils forment ensemble pour le rayon 1; a et b les deux demi-axes inconnus; abaissons du point L sur CM la perpendiculaire Ll, laquelle a pour valeur $\frac{ng}{1}$: on aura (149) $a^2 - b^2 = f^2 - g^2$; et (150) $ab = nfg$. La premiere équation suppose qu'on ait $f > g$, et par conséquent $a > b$. Si $f < g$, et conséquemment $a < b$, on auroit $g^2 - f^2 = b^2 - a^2$. Mais, comme les résultats sont semblables dans les deux cas, je considere seulement le premier, où l'on a, $a^2 - b^2 = f^2 - g^2$.

L'équation $ab = nfg$ donne $b = \frac{nfg}{a}$. Substituant cette valeur de b dans l'autre équation $a^2 - b^2 = f^2 - g^2$, on aura $a^2 - \frac{n^2 f^2 g^2}{a^2} = f^2 - g^2$, ou $a^4 - a^2(f^2 - g^2) = n^2 f^2 g^2$; ce qui donne $a^2 = \frac{f^2 - g^2 \pm \sqrt{[(f^2 - g^2)^2 + 4n^2 f^2 g^2]}}{2}$. Mais des deux signes qui affectent le radical il faut employer seulement le signe supérieur, afin que la valeur de a puisse être réelle, ou que le problême puisse avoir une solution réelle. De là et de la substitution de la valeur de a^2 dans l'équation $a^2 - b^2 = f^2 - g^2$, on tirera

$$2a = \sqrt{[2(f^2 - g^2) + 2\sqrt{((f^2 - g^2)^2 + 4n^2 f^2 g^2)}]},$$
$$2b = \sqrt{[2\sqrt{((f^2 - g^2)^2 + 4n^2 f^2 g^2)} - 2(f^2 - g^2)^2]}.$$

Il est facile de construire ces valeurs par les propriétés du triangle rectangle. En effet, faites d'abord un triangle rectangle dont l'hypoténuse $= f$, l'un des côtés $= g$; vous

aurez (en nommant c l'autre côté), $c^2 = f^2 - g^2$. Cherchez une moyenne proportionnelle k entre 2CM ($2f$) et Ll (ng); vous aurez $k^2 = 2fng$, et $k^4 = 4n^2 f^2 g^2$. Ainsi

$$2a = \sqrt{[2c^2 + 2\sqrt{(c^4 + k^4)}]},$$
$$2b = \sqrt{[2\sqrt{(c^4 + k^4)} - 2c^2]}.$$

Pour trouver l'expression du radical intérieur $\sqrt{(c^4 + k^4)}$, faites un premier triangle rectangle qui ait pour côtés contigus à l'angle droit les lignes c et k; de l'angle droit abaissez sur l'hypoténuse une perpendiculaire qui détermine deux segments; avec ces deux segments, comme côtés contigus à l'angle droit, faites un second triangle rectangle; ensuite cherchez (Géom. 198) un quarré h^2, tel que l'on ait cette proportion, le segment qui, dans le premier triangle rectangle, répond au côté c, est à l'hypoténuse du second triangle rectangle, comme le quarré c^2 est au quarré h^2; vous aurez $h = \sqrt{(c^4 + k^4)}$. De sorte que $2a = \sqrt{[2(c^2 + h^2)]}$, et $2b = \sqrt{[2h^2 - c^2)]}$.

Maintenant, faites deux quarrés, dont le premier ait pour côté $\sqrt{(h^2 + c^2)}$, et le second pour côté $\sqrt{(h^2 - c^2)}$; la diagonale du premier quarré sera la valeur de $2a$, et celle du second la valeur de $2b$.

Tout cela est aisé à démontrer en construisant des figures pour suivre les opérations indiquées, et en appliquant à ces figures les propriétés du triangle rectangle établies dans les articles 185, 187, 188, etc. de la Géométrie.

Quant à la position des axes $2a$ et $2b$, elle se déterminera par l'article précédent, en opérant comme pour l'ellipse.

153. Théorême XVI. *Les extrémités* L, R (Fig. 80), *de tous les diametres secondaires* LR, *conjugués aux diametres principaux* MK *d'une hyperbole* MAm *et de son opposée* NEK, *dont* AE *est le premier axe*, BD *le second, sont placées sur les périmetres de deux hyperboles opposées, dont le premier axe est* BD *et le second* AE.

Menez les perpendiculaires LQ, LX, aux deux axes de l'hyperbole principale; menez de plus l'ordonnée MP à

l'axe AE, et la tangente MT. En nommant AC, a; CB, b; CP, x; CX ou QL, u; CQ ou LX, z; on aura PM $= \frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a}$, PT $= \frac{xx-aa}{x}$; et les triangles semblables TPM, CQL, donneront TP $(\frac{xx-aa}{x})$: PM $(\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{a})$ :: CQ (z) : QL (u). D'où l'on tire $u = \frac{bxz}{a\sqrt{(xx-aa)}}$, ou bien $uu = \frac{b^2 x^2 z^2}{a^2(xx-aa)}$. Substituant dans cette équation pour xx sa valeur $zz + aa$ (127), on aura $zz = \frac{aa}{bb} \times (uu-bb)$; ce qui est l'équation d'une hyperbole dont $2b$ est le premier axe, $2a$ le second, u l'abscisse prise sur le premier à compter du centre, z l'ordonnée correspondante.

154. Théorême XVII. *Deux hyperboles sont semblables lorsque leurs axes homologues sont proportionnels.*

Même démonstration que pour deux ellipses semblables (123).

Solution d'un problême utile dans l'architecture des voûtes en arcs rampants.

155. Le ceintre d'une voûte forme ce qu'on appelle un *arc rampant* lorsque les pieds-droits qui la soutiennent ne sont pas de même hauteur, et que par conséquent la voûte s'éleve, ou *rampe*, en termes d'ouvriers, d'un pied-droit à l'autre. Ce ceintre doit toucher les deux pieds-droits, et de plus passer par un point donné, qui sert à déterminer la ligne de rampe, c'est-à-dire la ligne qui touche la courbe en cet endroit. Ordinairement les ouvriers composent les arcs rampants avec une suite d'arcs de cercle; ce qui a l'inconvénient de former une courbe discontinue. Mais on peut et il vaut mieux y employer une courbe continue, en prenant pour l'arc rampant entier

une portion de section conique. Voici à quoi se réduit le problème.

156. *Déterminer une section conique* (Fig. 81) *qui touche en deux points donnés* M *et* N *les côtés* TZ, TV, *de l'angle donné* ZTV, *et qui passe par un autre point donné* H.

Nous pouvons concevoir en général que la section conique demandée est une ellipse ou une hyperbole ; car le cercle et la parabole se rapportent à l'ellipse (98).

Joignons les deux points donnés M et N par la droite MN ; divisons cette ligne en deux parties égales, au point P ; par ce point, et par le sommet T de l'angle donné, menons la droite indéfinie TP. Le centre de la courbe se trouvera nécessairement sur cette ligne. Car, si par le centre et par le point P on mene une droite indéfinie, il est évident (117, n°. II, et 148, n°. II), que les deux sous-tangentes qui répondent aux deux ordonnées égales, et dont les directions tombent sur la ligne dont nous venons de parler, ont des valeurs égales, et que par conséquent les extrémités T de ces deux sous-tangentes tombent au point d'intersection des deux tangentes ZT, VT. Ainsi, le point T, le point P, et le centre de la section conique, sont placés sur une même ligne droite.

Imaginons que le point C soit le centre de la section conique, le point L l'extrémité d'un diametre de cette courbe ; du point donné H, menons parallèlement à NM l'ordonnée HO au diametre en question. Les points T, M, N, P, H, étant donnés, il est évident que les lignes PN ou PM, TP, HO, PO, sont données. Reste à trouver PC, ou TC, pour avoir la position du centre de la courbe ; ensuite nous en conclurons CL.

Suivant la position qui est attribuée au point C dans notre Figure, la courbe est une ellipse ; et alors on a, par la propriété de cette courbe relativement à deux diametres conjugués, $(OH)^2 : (PN)^2 :: (LC)^2 - (OC)^2 : (LC)^2 - (PC)^2$. Donc *dividendo*, $(OH)^2 - (PN)^2 : (PN)^2 :: (PC)^2 - (OC)^2 : (LC)^2 - (PC)^2$. Or, $OC = PC - PO$, et $(OC)^2 = (PC)^2 - 2PC \times PO$

$+(PO)^2$; $(LC)^2-(PC)^2 = PC\times PT$ (117, n° II). Donc la proportion précédente deviendra $(OH)^2-(PN)^2 : (PN)^2 : 2PC\times PO-(PO)^2 : PC\times PT$. D'où l'on tire $PC = \frac{(PN)^2\times(PO)^2}{2PO\times(PN)^2-[(OH)^2-(PN)^2]\times PT}$, expression dans le second membre de laquelle tout est connu. Ainsi on connoîtra PC. Ajoutant TP à PC, et réduisant tout au même dénominateur, on aura

$$TC = \frac{2PO\times(PN)^2\times PT-(PT)^2\times[(OH)^2-(PN)^2]+(PN)^2\times(PO)^2}{2PO\times(PN)^2-[(OH)^2-(PN)^2]\times PT},$$

quantité connue.

Dans l'hypothese de notre Figure, on a $(CL)^2-(PC)^2 = PT\times PC$; et par conséquent $(CL)^2 = (PC)^2+PT\times PC$, et $CL = \pm\sqrt{[(PC)^2+PT\times PC]}$, quantité toute connue.

La valeur positive représentant le demi-diametre CL, la valeur négative représentera le demi-diametre égal, mais posé en sens contraire sur la même ligne droite.

En supposant que CB soit le demi-diametre conjugué au demi-diametre CL, on trouvera CB, au moyen de la proportion $(PN)^2 : (CB)^2 :: (CL)^2-(CP)^2 : (CL)^2$, laquelle donne $(CB)^2 = \frac{(PN)^2\times(CL)^2}{(CL)^2-(CP)^2}$; et $CB = \pm\sqrt{[\frac{(PN)^2\times(CL)^2}{(CL)^2-(CP)^2}]}$, quantité toute connue. On fera sur le double signe la même observation que pour la valeur de CL.

Connoissant les deux demi-diametres conjugués CL, CB, on pourra déterminer (121) les axes de l'ellipse et la décrire.

157. *Remarque I.* L'ellipse se change en cercle, lorsque l'angle TPN des coordonnées est droit, et que de plus $CB = CL$. Or, la premiere condition exige que les deux angles TNM, TMN, soient égaux, ou que le triangle TNM soit isoscele, puisque la droite TP divise NM en deux parties égales au point P. La seconde donne $(CL)^2 = (CB)^2$, ou $(CL)^2 = \frac{(PN)^2\times(CL)^2}{(CL)^2-(CP)^2}$, ou $(CL)^2 = (CP)^2+(PN)^2$; et comme on a d'un autre côté $(CL)^2 = (CP)^2+PT\times CP$, on aura

$(CP)^2 + (PN)^2 = (CP)^2 + PT \times CP$, et par conséquent $PC = \frac{(PN)^2}{PT}$. Egalant cette valeur particuliere de PC à celle qu'on a trouvée ci-dessus en général pour la même ligne, on aura $\frac{(PN)^2}{PT} = \frac{(PN)^2 \times (PO)^2}{2PO \times (PN)^2 - [(OH)^2 - (PN)^2] \times PT}$; d'où l'on tire $PT = \frac{2PO \times (PN)^2}{(PO)^2 + (OH)^2 - (PN)^2}$, expression de la hauteur du triangle isosceleTNM. Ainsi, pour que la courbe cherchée puisse être un cercle, il faut que le triangle TNM soit isoscele, et qu'il ait la hauteur qu'on vient de déterminer.

158. *Remarque II.* Si le dénominateur de la fraction qui exprime en général la valeur de PC étoit zéro, ou qu'on eût $2PO \times (PN)^2 - [(OH)^2 - (PN)^2] \times PT = 0$, ou $PT = \frac{2PO \times (PN)^2}{(OH)^2 - (PN)^2}$; alors la valeur de CP seroit infinie. De même, les valeurs de CL et de CB seroient infinies. Ainsi l'ellipse deviendroit une parabole; car la parabole peut être regardée comme une ellipse dont le centre est infiniment éloigné d'un point quelconque de son périmetre. Le point L étant l'origine du diametre LC de la parabole, et connoissant la valeur de la sous-tangente PT par l'équation $PT = \frac{2PO \times (PN)^2}{(OH)^2 - (PN)^2}$ dont tout le second membre est connu, on connoîtra l'abscisse LP qui est la moitié de PT. Donc si l'on nomme P le parametre du diametre LC, on aura $P = \frac{(PN)^2}{LP}$, quantité donnée. Connoissant le parametre du diametre LC, et l'angle de ce diametre avec ses ordonnées, on trouvera (93) la position de l'axe de la parabole, son sommet et son parametre.

159. *Remarque III.* Si la valeur de CP, supposée finie, est négative, ou qu'on ait $2PO \times (PN)^2 < [(OH)^2 - (PN)^2] \times PT$, ou $PT > \frac{2PO \times (PN)^2}{(OH)^2 - (PN)^2}$; alors le centre de la courbe tombera au-dessus du point L en C'; et cette courbe sera

une hyperbole. On déterminera deux demi-diametres conjugués, et ensuite les axes de l'hyperbole, en employant, comme pour l'ellipse, les propriétés analogues de l'hyperbole.

160. *Remarque IV*. Dans la pratique, il faut, pour abréger les opérations, et pour éviter en même temps les erreurs quelquefois assez considérables que le tracé graphique entraîne nécessairement avec lui, évaluer en nombres les lignes données, et chercher aussi en nombres les lignes inconnues.

La ligne de rampe est facile à déterminer, puisqu'il ne s'agit pour cela que de mener par un point donné H une tangente à une section conique dont l'espece et les dimensions sont données.

CHAPITRE V.

Des problêmes déterminés qui passent le second degré.

161. Les problêmes déterminés de géométrie qui passent le second degré sont ceux qui conduisent à des équations finales et déterminées d'un degré supérieur au second. Les conditions s'en expriment en langage algébrique par des moyens analogues à ceux que nous avons employés dans les recherches précédentes. Nous donnerons ci-dessous quelques problêmes de cette espece. Commençons par expliquer la maniere de résoudre géométriquement les équations déterminées qui montent plus haut que le second degré.

162. Nous avons donné, dans le traité d'algebre, la méthode pour trouver en général les racines d'une équation du troisieme ou du quatrieme degré, sauf les restrictions qui ont lieu dans le cas irréductible ; et nous avons observé qu'on n'a encore pu résoudre en général aucune des équations qui passent le quatrieme degré, et qu'alors on est réduit à déterminer les racines, seulement par approxima-

tion. La résolution *algébrique* (exacte ou approchée) d'une équation sert à trouver en nombres les valeurs de l'inconnue que l'on cherche; et cela est souvent d'un usage très commode dans la pratique. Mais la résolution *géométrique* d'une équation, c'est-à-dire l'art de trouver en *lignes* les valeurs de l'inconnue, s'exécute par la construction de différentes courbes qui se rencontrent, et dont les ordonnées ou abscisses communes donnent les racines de l'équation. Je m'explique.

163. On a vu en différentes circonstances que si un problème a plusieurs conditions qui soient exprimées par des équations particulieres, l'équation finale et déterminée se trouve en éliminant successivement toutes les inconnues, à l'exception d'une seule. Donc, réciproquement, toute équation déterminée peut être considérée comme la résultante de plusieurs autres équations qui contiennent différentes inconnues. De plus, on est toujours le maître de considérer une équation déterminée comme la résultante de deux équations entre deux inconnues et les quantités données, pourvu que ces équations composantes soient telles qu'en éliminant l'une des inconnues, on trouve en effet l'équation proposée. Pour simplifier l'opération, autant qu'il est possible, il faut donner aux équations composantes toute la simplicité dont elles sont susceptibles.

Supposons, par exemple, qu'on demande le côté d'un cube double d'un cube donné. En nommant a le côté du cube donné, x le côté inconnu du cube demandé; on aura l'équation $x^3 = 2a^3$; ou, $x^3 - 2a^3 = 0$; ou (en multipliant tout par x), $x^4 - 2a^3x = 0$. Je prends une seconde inconnue y, telle que l'on ait $xx = ay$. Cette équation donne $x^4 = a^2y^2$. Substituant cette valeur de x^4 dans l'équation proposée $x^4 - 2a^3x = 0$, on aura $a^2y^2 - 2a^3x = 0$, ou $yy = 2ax$. L'équation $x^4 - 2a^3x = 0$ peut donc être regardée comme la résultante de ces deux-ci, $yy = 2ax$, $xx = ay$, puisqu'en éliminant y on retombe nécessairement dans l'équation $x^4 - 2a^3x = 0$. Les deux équations compo-

santes $yy = 2ax$, $xx = ay$, représentent chacune une parabole ; et elles se construisent ainsi.

Ayant mené la ligne indéfinie AZ (Fig. 82), et ayant pris sur cette ligne le point fixe A, construisez une parabole BMAb, qui ait son axe sur AZ, son sommet au point A, pour parametre une ligne égale à $2a$, et dont les abscisses, prises sur AZ à compter du point A, soient représentées par x, et les ordonnées perpendiculaires correspondantes, par y. Par le point A, élevez AX perpendiculaire à AZ ; construisez une seconde parabole CMAc, qui ait son axe sur AX, son sommet au point A, pour parametre une ligne $= a$, et dont les abscisses, prises sur AX à compter du point A, soient représentées par y, et les ordonnées perpendiculaires correspondantes par x. Il est clair que tous les points de la parabole BMAb sont les *lieux* de l'équation $yy = 2ax$; c'est-à-dire qu'en donnant à x une valeur quelconque, l'extrémité de l'ordonnée correspondante est placée sur la courbe parabolique BMAb ; et que de même tous les points de la parabole CMAc sont les lieux de l'équation $xx = ay$. Or, ces deux courbes se coupent en un point *déterminé* M, tel que si l'on mene aux axes AZ, AX, les ordonnées perpendiculaires MP, MQ, l'inconnue x que l'on cherchoit est l'abscisse *déterminée* AP, et la valeur correspondante de y est l'ordonnée *déterminée* PM, ou AQ. Car, au point M, en tant qu'il appartient tout à-la-fois aux deux paraboles, les deux équations $yy = 2ax$, $xx = ay$, ont lieu. Donc, puisque x et y ont les mêmes valeurs pour les deux courbes, et que la position du point M est donnée, parcequ'on est censé connoître tous les points par lesquels passent les deux paraboles, il s'ensuit que le côté x du cube demandé a pour expression *linéaire* l'abscisse déterminée AP.

On observera que les deux paraboles passent par le point A, parceque, dans les deux équations composantes, $x = 0$ donne $y = 0$. La racine $x = 0$ est inutile, et provient de ce qu'on a multiplié l'équation primitive $x^3 - 2a^3x = 0$, par x, pour former l'équation $x^4 - 2a^3x = 0$. Comme nos deux paraboles ne se coupent pas ailleurs qu'aux points A et M, auxquels répondent deux racines réelles de l'équatio

$x^4 - 2a^2x = 0$, on doit conclure que les deux autres racines de cette équation sont imaginaires.

164. Soit l'équation déterminée $x^3+ax^2+bx+c=0$, qui est la plus générale du troisieme degré. En multipliant chaque membre par x, elle devient $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$, et se rapporte à l'équation générale du quatrieme degré, $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dans laquelle on auroit $d = 0$. Ainsi la construction des équations du troisieme degré dépend de la construction des équations du quatrieme. Je vais donc construire celles-ci par une méthode générale, d'où l'on tirera, comme corollaires, tous les cas tant du quatrieme degré que du troisieme.

165 Supposons qu'on ait $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: a, b, c, d, étant des quantités données, x l'inconnue. Je forme d'abord l'équation indéterminée $my = xx + \frac{ax}{2}$, y étant une seconde inconnue, m une constante arbitraire, à laquelle on sera par conséquent le maître de donner la valeur qu'on jugera la plus propre à simplifier la construction. Cette équation est la même chose que,

I. $my - xx - \frac{ax}{2} = 0$.

Elle donne $m^2y^2 = x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4}$; et par conséquent $x^4 + ax^3 = m^2y^2 - \frac{a^2x^2}{4}$. Substituant pour $x^4 + ax^3$ sa valeur dans l'équation proposée, on aura $m^2y^2 - \frac{a^2x^2}{4} + bx^2 + cx + d = 0$, ou bien, en divisant tout par m^2,

II. $yy - \frac{a^2x^2}{4m^2} + \frac{bx^2}{m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$.

Mettons dans cette équation pour x^2 sa valeur $my - \frac{ax}{2}$, nous aurons,

III. $yy - \frac{a^2y}{4m} + \frac{a^3x}{8m^2} + \frac{by}{m} - \frac{abx}{2m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$.

Mettons successivement et séparément, dans le second

terme et dans le troisieme terme de l'équation II, pour x^2 sa valeur, nous formerons les deux équations,

IV. $yy - \frac{a^2y}{4m} + \frac{a^3x}{8m^2} + \frac{bx^2}{m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$;

V. $yy - \frac{d^2x^2}{4m^2} + \frac{by}{m} - \frac{abx}{2m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$.

Ajoutons l'équation I avec l'équation III, puis retranchons l'équation I de l'équation III; nous formerons ces deux-ci :

VI. $yy + my - xx - \frac{ax}{2} - \frac{a^2y}{4m} + \frac{a^3x}{8m^2} + \frac{by}{m} - \frac{abx}{2m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$;

VII. $yy - my + xx + \frac{ax}{2} - \frac{a^2y}{4m} + \frac{a^3x}{8m^2} + \frac{by}{m} - \frac{abx}{2m^2} + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$.

Or, en imaginant que x et y représentent les coordonnées d'une courbe, et considérant que les équations précédentes sont toutes du second degré, et que par conséquent elles peuvent être comparées avec l'équation générale $s^2 + as + brs + cr + dr^2 + e = 0$ de l'article 68; on verra par l'analyse des articles 69, 70, 71, 72, etc., que les équations I et III se rapportent à la parabole; que les équations II et IV se rapportent à l'ellipse si $(-\frac{a^2}{4m^2} + \frac{b}{m^2})$ et $\frac{b}{m^2}$ sont des quantités positives, et à l'hyperbole si ces quantités sont négatives; que les équations V et VI se rapportent à l'hyperbole; que l'équation VII se rapportera au cercle, pourvu que les coordonnées x et y soient perpendiculaires entre elles, sinon elle se rapportera à l'ellipse.

Je suppose toujours que les quantités constantes a, b, c, etc. ont des valeurs et des signes tels que les équations précédentes soient réelles, et représentent conséquemment des courbes. Car, si on avoit, par exemple, une équation de cette espece, $yy + \frac{xx}{8} + aa = 0$, elle seroit absurde, et ne représenteroit rien; attendu que y est toujours ima-

ginaire, quelque valeur qu'on donne à x, et réciproquement.

166. Quoique la comparaison des équations précédentes avec la formule générale de l'article 68 soit facile, en voici néanmoins deux exemples. On opérera de même dans les autres cas.

Soit l'équation I, $my - xx - \frac{ax}{2} = 0$. Je commence par écrire la formule générale $s^2 + as + brs + cr + dr^2 + e = 0$ de la maniere suivante, $s^2 + \alpha s + \beta rs + \gamma r + \delta r^2 + \epsilon = 0$, en mettant des lettres grecques α, β, γ, etc. à la place des lettres latines, afin d'éviter que ces dernieres lettres qui sont employées dans les équations à comparer ne paroissent avoir chacune des valeurs différentes. Ensuite j'écris s pour x, r pour y, dans l'équation proposée $my - xx - \frac{ax}{2} = 0$; et j'ai $mr - s^2 - \frac{as}{2} = 0$, ou bien $s^2 + \frac{as}{2} - mr = 0$. Cela posé, cette équation s'identifiera terme à terme avec la formule $s^2 + \alpha s + \beta rs + \gamma r + \delta r^2 + \epsilon = 0$, si l'on fait $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = -m$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0$. Par conséquent l'équation (B) de l'article 68 deviendra $zz - mr - \frac{aa}{16} = 0$, et l'équation (D) de l'article 70 deviendra $zz + \frac{mq}{p}u - \frac{aa}{16} = 0$, ou bien $zz = \frac{aa}{16} - \frac{mqu}{p}$. Cette derniere équation se rapporte au premier cas de l'article 72, ou à la parabole.

Soit l'équation II, $yy + (\frac{b}{m^2} - \frac{a^2}{4m^2})x^2 + \frac{cx}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$; et supposons que $\frac{b}{m^2} - \frac{a^2}{4m^2}$ soit une quantité positive, que je représente par $+k$, on aura (en mettant s pour y, r pour x), $s^2 + kr^2 + \frac{cr}{m^2} + \frac{d}{m^2} = 0$. Comparons cette équation terme à terme avec la formule $s^2 + \alpha s + \beta rs + \gamma r + \delta r^2 + \epsilon = 0$, nous aurons $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = k$, $\gamma =$

$\frac{c}{m^2}$, $s = \frac{d}{m^2}$. Ainsi l'équation (B) de l'article 68 sera $zz + \frac{cr}{m^2} + kr^2 + \frac{d}{m^2} = 0$; et l'équation (D) de l'article 70 sera $zz + \frac{cqu}{m^2p} + \frac{kq^2u^2}{p^2} + \frac{d}{m^2} = 0$, ou bien $zz = -\frac{d}{m^2} - \frac{cqu}{m^2p} - \frac{kq^2u^2}{p^2}$. La quantité k étant supposée positive, et le quarré zz étant toujours positif, de même que les deux quarrés $\frac{q^2}{p^2}$, u^2; il faut nécessairement que l'une des quantités $\frac{d}{m^2}$, $\frac{cq}{m^2p}$, soit négative, et telle que la valeur résultante pour zz soit positive. Supposons que $\frac{d}{m^2}$ soit une quantité négative, que je représente par $-h$, on aura $zz = h - \frac{cqu}{m^2p} - \frac{kq^2u^2}{p^2}$; équation qui se rapporte au second cas de l'article 72, et qui appartient par conséquent à l'ellipse.

167. Il est donc clair par-là que toute équation du quatrieme ou du troisieme degré peut se résoudre géométriquement par les rencontres de deux sections coniques, suivant l'esprit de la méthode que nous avons employée (163) pour résoudre l'équation particuliere $x^3 - 2a^3 = 0$. On choisira dans chaque cas les deux sections coniques qu'on jugera devoir donner les constructions les plus simples.

Il est bon de remarquer qu'au lieu de l'équation I, $my = xx + \frac{ax}{2}$, nous aurions pu supposer $my = xx$; mais alors le rectangle xy se seroit trouvé dans les équations suivantes, et la construction en deviendroit plus compliquée. Si donc l'équation $my = xx + \frac{ax}{2}$ est un peu moins simple que l'équation $my = xx$, cet inconvénient est plus que compensé par la simplicité qui en résulte pour l'équation qui doit être combinée avec la précédente.

168. Les lecteurs qui auront suivi avec attention les diffé-

rentes formes par lesquelles nous avons fait passer l'équation générale de l'article 68 pour parvenir aux formules de l'article 72 n'auront aucune peine à reconnoître l'espece de la section conique à laquelle se rapporte une équation du second degré à deux variables ; car ils n'auront pour cela qu'à comparer terme à terme l'équation proposée avec l'équation générale de l'article 68; ce qui donnera les valeurs des constantes a, b, c, etc. relativement aux cas que l'on considere.

169. Les équations déterminées qui passent le quatrieme degré ne peuvent être construites par le moyen de deux sections coniques, mais il y faut employer au moins une courbe d'un ordre supérieur. Soit, par exemple, l'équation du cinquieme degré $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Cette équation ne peut pas résulter de la combinaison de deux équations du second degré ; mais nous pourrons la construire ainsi. Soit $xx = ay$, équation à la parabole; et mettons pour x^2 sa valeur dans l'équation précédente : nous aurons $a^2y^2x + a^3y^2 + bayx + cay + dx + e = 0$; équation d'une courbe du troisieme ordre, qui, étant combinée avec la parabole représentée par l'équation $xx = ay$, donnera les racines de l'équation proposée $x^5 + ax^4 +$ etc. On trouvera à-peu-près de même les courbes qui peuvent servir à construire les équations du sixieme degré, du septieme, etc.

170. L'élégance d'une construction géométrique demande qu'on y emploie les courbes de l'ordre le plus simple qu'il est possible relativement au degré de l'équation qu'il s'agit de construire. En conséquence les géometres ont établi des regles pour reconnoître dans chaque cas les courbes qu'il convient d'employer. Je n'entrerai pas dans ce détail, qui me meneroit trop loin, et qui suppose d'ailleurs la connoissance de plusieurs propriétés des courbes que mon plan ne permet pas d'analyser. On peut voir à ce sujet les ouvrages déja cités de MM. Euler et Cramer. Je me contenterai d'indiquer une méthode générale pour construire les

équations de tous les degrés, laquelle est d'un usage très commode dans la pratique.

171. Soit en général l'équation déterminée $m = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ etc. Prenez une nouvelle inconnue y, telle que l'on ait $y = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ etc. Construisez la courbe représentée par cette équation, en observant que si chacune des lettres m, a, b, c, etc., x, représente une ligne, comme on peut toujours le supposer; le terme ax est censé divisé par une ligne qui est prise pour unité; le terme bx^2 est censé divisé par le quarré de cette unité; le terme cx^3 par le cube de l'unité, etc. La valeur géométrique de chacun des termes ax, bx^2, cx^3, etc. se trouvera donc par la méthode des articles 35, 36, etc.

Cela posé, sur une ligne indéfinie AZ (Fig. 83) prenez l'abscisse quelconque AP $= x$, et menez l'ordonnée correspondante PM (y), qu'on peut toujours supposer, et que nous supposons en effet perpendiculaire à AP. Décrivez la courbe AMMM, qui a pour équation $y = ax + bx^2 + cx^3 +$ etc., en déterminant successivement tous les termes ax, bx^2, cx^3, etc. qui doivent composer par leur assemblage la valeur de y, et puis les ajoutant ensemble pour avoir y.

Cette courbe étant décrite, pour avoir les expressions linéaires des racines de l'équation déterminée $m = ax + bx^2 + cx^3 +$ etc., élevez par le point A, et perpendiculairement à AZ, la droite AQ; prenez AK $= m$; et menez KH parallele à AZ; par les points H, où KH coupe la courbe, abaissez sur AZ les perpendiculaires HE. Alors les abscisses correspondantes AE sont les racines de l'équation proposée. Il y aura autant de racines réelles qu'il y a de points d'intersection de la droite KH avec la courbe. Les autres racines de l'équation, s'il y en a, seront imaginaires; sur quoi on se souviendra que les racines imaginaires vont toujours deux à deux.

172. Nous avons supposé jusqu'ici qu'il étoit question de construire une équation déterminée d'un certain degré.

Mais si, dans la solution d'un problème, on a, soit directement, soit par la combinaison de toutes les équations qui expriment sa nature, deux équations et deux inconnues, il ne sera pas nécessaire d'éliminer l'une de ces inconnues, et on pourra construire tout de suite, si l'on veut, les deux équations dont il s'agit. Supposons, par exemple, qu'on soit parvenu à ces deux équations, $xx + yy = aa$, $yy = bx + cc$, la premiere au cercle, la seconde à la parabole. Nous pourrions éliminer x ou y, et construire l'équation résultante par les moyens exposés ci-dessus; mais nous nous épargnerons du travail en construisant directement les deux équations proposées. D'abord, pour la premiere, du point C comme centre (Fig. 84) avec le rayon a, je décris un cercle AEBH, qui est le lieu de l'équation $xx+yy=aa$, en comptant les abscisses CP(x) du centre C, et menant les ordonnées perpendiculaires MP(y) correspondantes. Pour la seconde équation $yy = bx + cc$, je commence par transformer (36) le quarré cc en un rectangle bd, d étant une ligne donnée; ce qui produit $yy = bx + bd = b\,(x + d)$, ou $yy = bu$, en faisant $x + d = u$. Cela posé, je prends sur le diametre BA la partie CO $= d$; je décris une parabole qui ait son sommet au point O, son axe sur la ligne OB, et pour parametre la ligne représentée par b. Cette parabole coupe le cercle aux points déterminés E et H; de sorte que si l'on mene au diametre AB les perpendiculaires EK, HK, ces deux lignes égales, l'une positive, l'autre négative, expriment les valeurs déterminées de y, qui répondent à la valeur déterminée CK de x.

Il faut cependant observer qu'on ne doit ainsi construire séparément les deux équations que dans le cas où cette opération est en effet plus simple que ne seroit la construction de l'équation déterminée résultante de l'élimination de l'une des deux inconnues; autrement il faudroit préférer le second moyen. Supposons, par exemple, qu'on ait les deux équations $y = ax + b$, $yy = c + dx + ex^2$, la premiere à la ligne droite, la seconde à l'hyperbole: il vaut mieux, pour la simplicité et l'élégance de la construction,

éliminer y, et construire l'équation résultante en x, que de construire immédiatement les deux équations proposées ; car l'équation déterminée en x peut se construire par les propriétés du cercle ou du triangle rectangle ; ce qui est d'un usage beaucoup plus simple et plus commode que ne seroit l'hyperbole, dont la description est longue et sujette à erreur.

Finissons par les problèmes que nous avons annoncés (161).

173. Problème I. *Diviser un angle donné* ACB (Fig. 85) *en trois parties égales.*

Du sommet C de l'angle proposé, avec un rayon donné CA, soit décrit un arc de cercle AMNB, qui mesure cet angle. Que chacun des arcs AM, MN, NB, soit le tiers de l'arc AMNB ; qu'on mene le sinus BD de l'angle ACB, et le sinus MH de l'angle ACM, qui est le tiers de l'angle ACB.

Supposons le rayon $CA = r$, le sinus donné BD de l'arc $AB = a$, l'inconnue $MH = x$. Nommons de plus $3u$ l'arc AB, et par conséquent u l'arc AM. On a (Géom. 449).

$$\text{Sin. } 3u = \text{sin. } (2u + u) = \frac{\text{sin. } 2u \text{ cos. } u + \text{cos. } 2u \text{ sin. } u}{r},$$

$$\text{sin. } 2u = \text{sin. } (u + u) = \frac{2 \text{ sin. } u \text{ cos. } u}{r},$$

$$\text{cos. } 2u = \text{cos. } (u + u) = \frac{(\text{cos. } u)^2 - (\text{sin. } u)^2}{r}.$$

Mettant dans la premiere de ces équations, pour sin. $3u$, sa valeur donnée a, et pour sin. $2u$, cos. $2u$ leurs valeurs données par les deux autres, on trouvera d'abord

$$a = \frac{3 \text{ sin. } u \text{ (cos. } u)^2 - (\text{sin. } u)^3}{r^2};$$

ensuite, substituant pour sin. u sa valeur x, et pour $(\text{cos. } u)^2$ sa valeur $r^2 - x^2$, enfin ordonnant par rapport à l'inconnue x, il nous viendra,

$$(A) \quad x^3 - \frac{3r^2 x}{4} + \frac{ar^2}{4} = 0 ;$$

équation du troisieme degré, qui se rapporte à la formule $x^3 - px + q = 0$, avec la condition qu'on a ici en général

$\frac{p'}{27} > \frac{qq}{4}$; car pour un angle quelconque, a est moindre que r et ne devient r que lorsque l'angle proposé ACB est droit; auquel cas la question n'est plus qu'un exemple particulier. Ainsi, par la théorie des équations du troisieme degré exposée dans le traité d'*Algebre*, l'équation (A) a ses trois racines réelles, et appartient en général *au cas irréductible*. Voyons d'abord qu'elles sont ces racines.

1°. La ligne BD étant le sinus non seulement de l'arc AB, mais encore de tous les arcs qui se terminent aux points A et B (les raisonnements seroient les mêmes pour les cosinus), on voit que BD est le sinus de tous les arcs compris dans ces deux suites, en nommant c la circonférence du cercle :

$$3u,\ 3u+c,\ 3u+2c,\ 3u+3c,\ 3u+4c,\ \text{etc.},$$
$$3u,\ c-3u,\ 2c-3u,\ 3c-3u,\ 4c-3u,\ \text{etc.}$$

Ainsi au même sinus BD correspondent les sinus des tiers de tous les arcs proposés, c'est-à-dire les sinus de tous les arcs compris dans les deux suites :

$$\frac{3u}{3},\ \frac{3u+c}{3},\ \frac{3u+2c}{3},\ \frac{3u+3c}{3},\ \frac{3u+4c}{3},\ \text{etc.},$$
$$\frac{3u}{3},\ \frac{c-3u}{3},\ \frac{2c-3u}{3},\ \frac{3c-3u}{3},\ \frac{4c-3u}{3},\ \text{etc.}$$

Or, dans la premiere suite il existe un sinus pour le premier terme $\frac{3u}{3}$; les deux termes suivants $\frac{3u+c}{3}$, $\frac{3u+2c}{3}$, ont aussi chacun un sinus particulier. Les autres termes $\frac{3u+3c}{3}$, $\frac{3u+4c}{3}$, $\frac{3u+5c}{3}$, etc. sont inutiles à considérer, attendu qu'ils ne donneroient pas de nouveaux sinus. En effet $\frac{3u+3c}{3} = \frac{3u}{3} + c$, $\frac{3u+4c}{3} = \frac{3u+c}{3} + c$, $\frac{3u+5c}{3} = \frac{3u+2c}{3} + c$, $\frac{3u+6c}{3} = \frac{3u}{3} + 2c$, $\frac{3u+7c}{3} = \frac{3u+c}{3} + 2c$, etc.

Or (Géo. 439) $\sin.(\frac{3u}{3}+c) = \sin.\frac{3u}{3}$, $\sin.(\frac{3u+c}{3}+c) = \sin.\frac{3u+c}{3}$, $\sin.(\frac{3u+2c}{3}+c) = \sin.\frac{3u+c}{3}$, $\sin.(\frac{3u}{3}$

$+ c) = \sin. \frac{3u}{3}$, $\sin. (\frac{3u+c}{3} + 2c) = \sin. \frac{3u+c}{3}$; ainsi de suite. Par où l'on voit que l'on retrouve les sinus que l'on a déja.

Dans la seconde suite, le premier terme est le même que celui de la précédente, et par conséquent le sinus est le même. Les deux termes suivants $\frac{c-3u}{3}$, $\frac{2c-3u}{3}$, ont chacun leurs sinus particuliers. Les autres termes sont inutiles à considérer, par la même raison que ci-dessus.

Il résulte de ces observations que nous avons seulement les sinus des cinq arcs $\frac{3u}{3}$, $\frac{3u+c}{3}$, $\frac{3u+2c}{3}$, $\frac{c-3u}{3}$, $\frac{2c-3u}{3}$. Or ces cinq arcs ne fournissent réellement que trois sinus; car les deux arcs $\frac{3u+c}{3}$ et $\frac{2c-3u}{3}$ composent ensemble la circonférence; l'un est, par exemple, l'arc AME, l'autre l'arc AKE, et par conséquent ils ont le même sinus EI. Pareillement les deux arcs $\frac{3u+2c}{3}$ et $\frac{c-3u}{3}$ composent ensemble la circonférence; l'un est, par exemple, l'arc AEK, l'autre l'arc AK, et par conséquent ils ont le même sinus KL. Ainsi nous n'avons en tout que les trois sinus MH, EI, KL, que l'on peut supposer être ceux des trois arcs $\frac{3u}{3}$, $\frac{3u+c}{3}$, $\frac{3u+2c}{3}$, c'est-à-dire u, $u + 120^\circ$, $u + 240^\circ$.

2°. Les trois racines de l'équation (A) étant réelles, il suit de la théorie des équations que si le sinus a est une quantité positive, cette équation aura deux racines positives et une racine négative; et que si a est une quantité négative, elle aura deux racines négatives et une positive. De plus cette même équation n'ayant point de second terme, la somme des deux racines positives sera égale à la racine négative prise avec un signe contraire; ou la somme des deux racines négatives sera égale à la racine positive prise avec un signe contraire. Tout cela peut se démon-

trer ici immédiatement, comme on va voir. Je me contente de considérer le premier cas; on raisonnera de même pour le second.

Soient, comme ci-devant, AM, AME, AEK, les trois arcs dont les sinus MH, EI, KL, sont les racines de l'équation (A). Dans cette hypothese les deux arcs u, $u+120^\circ$, sont l'un et l'autre moindres que 180°, et par conséquent $u < 60^\circ$; ils ont des sinus positifs, et le sinus du troisieme arc $u+240^\circ$ est négatif. L'équation (A) a donc d'abord deux racines positives et une négative. De plus on a (Géom. 449),

$$\text{sin.}\,(u+120^\circ) = \frac{\text{sin.}\,u\,\text{cos.}\,120 + \text{sin.}\,120^\circ\,\text{cos.}\,u}{r},$$

$$\text{sin.}\,(u+240^\circ) = \frac{\text{sin.}\,u\,\text{cos.}\,240^\circ + \text{cos.}\,u\,\text{sin.}\,240^\circ}{r}.$$

Or $\text{cos.}\,120^\circ = -\text{cos.}\,60^\circ = -\frac{r}{2}$, $\text{sin.}\,120^\circ = \text{sin.}\,60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos.}\,240^\circ = \text{cos.}\,120^\circ = -\frac{r}{2}$, $\text{sin.}\,240^\circ = -\text{sin.}\,120^\circ = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Ainsi on aura

$$\text{sin.}\,(u+120^\circ) = -\frac{\text{sin.}\,u}{2} + \frac{\text{cos.}\,u\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{sin.}\,(u+240^\circ) = -\frac{\text{sin.}\,u}{2} - \frac{\text{cos.}\,u\sqrt{3}}{2}.$$

Ajoutant sin. u au second membre de la premiere de ces équations, la somme $\frac{\text{sin.}\,u}{2} + \frac{\text{cos.}\,u\sqrt{3}}{2}$ sera égale au second membre de l'autre pris avec un signe contraire. D'où l'on voit que la somme des deux racines positives est égale à la racine négative prise avec un signe contraire.

Concluons que généralement l'équation (A) est résoluble par les tables des sinus, puisque ses trois racines sont représentées par les sinus des trois arcs u, $u+120^\circ$, $u+240^\circ$, l'arc u étant le tiers d'un arc donné, dont le sinus est a pour le rayon r.

174. Exemple I. *Soit l'arc* AB *de* 90°.

En ce cas $a = r$, et l'équation (A) devient $x^3 - \frac{3r^2x}{4} + \frac{r^3}{4} = 0$, dont les trois racines sont $x = \frac{r}{2}$, $x = \frac{r}{2}$, $x = -r$. La premiere est le sinus d'un arc de 30°; la seconde le sinus d'un arc de 150°, supplément de 30, et la troisieme le sinus d'un arc de 270°.

J'ai voulu tirer ce cas de l'équation générale; mais il peut être résolu immédiatement au moyen de la regle et du compas. Pour cela du point A pour centre, avec la corde de 60° qui est égale au rayon, décrivez un arc de cercle qui coupe la circonférence en un point B; le reste du quart de circonférence sera un arc de 30 degrés. Divisez l'arc de 60° en deux parties égales (Géom. 109); le quart de circonférence se trouvera partagé en trois arcs égaux, chacun de 30 degrés. Ensuite, déterminant l'arc OE = 30°, et prenant l'arc AEK = 270°, on aura les arcs AE = 150°, AEK = 270°, dont les sinus sont les deux autres racines de l'équation.

175. Exemple II. *Soit l'arc* AB *de* 40°.

Dans cet exemple et les autres de même nature les racines ne peuvent pas être déterminées par la regle et le compas. Le problême est alors proprement celui qu'on appelle *la trisection de l'angle.* Voici le calcul numérique du cas proposé; on se conduira de même pour les autres.

Le rayon r étant arbitraire, supposons qu'il soit celui même des tables, que je représente par 10000. On emploieroit un plus grand nombre de zéros si on vouloit avoir une grande précision : je m'en tiens au nombre précédent afin d'abréger. Nous trouverons en conséquence, par les tables, $a = 6428$; le tiers de l'arc de 40° est 13° 20′, dont le sinus = 2306. Ajoutant à l'arc de 40° la circonférence entiere ou 360°, et prenant le tiers de la somme, on aura un arc de 133° 20′, dont le sinus (qui est le même que celui de son supplément 46° 40′) est 7274. Ajoutant encore à l'arc de 40° le double de la circonférence, et

prenant le tiers de la somme, on aura un arc de 253° 20′, dont le sinus (qui est le même que le sinus négatif de 253° 20′ — 180°, c'est-à-dire 73° 20′) est — 9580. Ainsi les trois racines de l'équation (A) sont, dans cet exemple, $x = 2306$, $x = 7274$, $x = -9580$.

176. *Remarque.* Nous venons d'apprendre à résoudre l'équation (A) en prenant le rayon r arbitrairement; mais si ce rayon étoit donné, il faudroit ajouter quelque chose au procédé; et la résolution des équations du troisieme degré, dans le cas irréductible, s'effectuera en général par approximation au moyen du problème suivant.

177. Problème II. *Résoudre l'équation* $x^3 - px + q = 0$, *en supposant qu'on ait* $\frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4}$, *et que par conséquent elle se rapporte au cas irréductible.*

Je compare terme à terme cette équation avec l'équation (A) du problème précédent, ce qui donne $r = \frac{4p}{3}$, ou $r = \sqrt{\frac{4p}{3}}$, $a = \frac{3q}{p}$. De sorte que, pour le rayon $\sqrt{\frac{4p}{3}}$, le sinus de l'arc $3u$ est $\frac{3q}{p}$.

Soient maintenant R le rayon des tables, et pour ce rayon b le sinus d'un arc semblable à $3u$; on aura la proportion, $r : R :: a : b$. Donc $b = a \times \frac{R}{r} = R \times \frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{4p}}$. Par où l'on voit que le sinus b des tables est donné, puisqu'il est egal au produit du rayon R par le coëfficient constant et donné $\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{4p}}$. De là on déterminera, comme ci-dessus, les trois racines X, X′, X″, de l'équation proposée, pour le rayon R. Soient x, x', x'', les racines pour le rayon r: de même qu'on a, $r : R :: a : b$, ou $a = b \cdot \frac{r}{R}$, on aura aussi (à cause des arcs semblables), $x = X \cdot \frac{r}{R}$, $x' = X' \cdot \frac{r}{R}$, $x'' = X'' \cdot \frac{r}{R}$.

Ainsi on aura les racines cherchées x, x', x'', en multipliant les racines trouvées X, X', X'', par le coëfficient constant et donné $\frac{r}{R}$ ou $\frac{\sqrt{\frac{4p}{3}}}{R}$.

178. Exemple. *Soit l'équation numérique* $x^3 - 5x + 3 = 0$.

D'abord on a ici $\frac{p^3}{27} > \frac{qq}{4}$, et par conséquent cette équation se rapporte au cas irréductible. La valeur de r est $\sqrt{\frac{20}{3}}$, et celle de a est $\frac{9}{5}$. Supposons R = 10000; on trouvera $b = \frac{9.10000.\sqrt{3}}{5\sqrt{20}} = 6971$ à-peu-près. Cherchant ce sinus dans les tables, je vois qu'il appartient à un arc de 44° 12′ à peu de chose près. Le tiers de cet arc est 14° 44′, dont le sinus = 2543. Ajoutant 360° à 44° 12′, et prenant le tiers de la somme, on aura un arc de 134° 44′, dont le sinus = 7104. Ajoutant encore deux fois 360° à 44° 12′, et prenant le tiers de la somme, on aura un arc de 254° 44′, dont le sinus = — 9647. D'où l'on voit que, pour le rayon R des tables, les trois valeurs de l'inconnue, ou les trois racines de l'équation, seroient 2543, 7104, — 9647; mais les trois racines qu'on cherche étant relatives au rayon r, il faut multiplier les précédentes par le rapport connu $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire $\frac{2,583}{10000}$; ce qui donnera (pour les trois véritables valeurs approchées des racines de notre équation, $x^3 - 5x + 3 = 0$), $x = 0,657$, $x' = 1,834$, $x'' = -2,491$.

179. *Scholie général.* Telles sont les principales questions qui regardent le problème de la trisection de l'angle, que j'ai cru devoir traiter avec une certaine étendue, à cause de sa célébrité et de son utilité pour la résolution des équations qui tombent dans le cas irréductible. Ce problème a donné

lieu d'en résoudre d'autres analogues, c'est-à-dire de déterminer le sinus ou le cosinus d'un arc sous-multiple quelconque d'un arc donné. Sur quoi il faut observer qu'il suffit de considérer les divisions impaires ; car (Géom. 109) tout arc peut être divisé en deux parties égales, ce qui (en multipliant convenablement les divisions) ramene toujours le problême à celui des divisions en nombre impair.

La méthode que j'ai employée pour la trisection de l'angle s'applique avec la même facilité aux divisions en cinq parties égales, en sept parties égales, etc. Car soit, par exemple, un arc donné que je nomme $5u$, et qu'il s'agisse de déterminer le sinus de l'arc u, qui en est la cinquieme partie : en supposant, pour abréger un peu, le rayon $= 1$, et nommant k le sinus donné de l'angle $5u$, nous aurons les équations :

$$k = \sin. 5u,$$

$$\sin. 5u = \sin. (4u+u) = \sin. 4u. \cos. u + \cos. 4u. \sin. u,$$

$$\sin. 4u = \sin. (3u+u) = \sin. 3u. \cos. u + \cos. 3u. \sin. u,$$

$$\cos. 4u = \cos. (3u+u) = \cos. 3u. \cos. u - \sin. 3u. \sin. u,$$

$$\sin. 3u = \sin. (2u+u) = \sin. 2u. \cos. u + \cos. 2u. \sin. u,$$

$$\cos. 3u = \cos. (2u+u) = \cos. 2u. \cos. u - \sin. 2u. \sin. u,$$

$$\sin. 2u = \sin. (u+u) = 2 \sin. u. \cos. u,$$

$$\cos. 2u = \cos. (u+u) = (\cos. u)^2 - (\sin. u)^2.$$

Par où l'on voit qu'en nommant x l'inconnue sin. u, on parviendra à une équation déterminée du cinquieme degré.

De même, pour la division en sept parties égales, on parviendra à une équation du septieme degré ; ainsi de suite.

Toutes ces équations peuvent se construire par la méthode générale de l'article 171.

Je n'ai pas besoin d'ajouter qu'à l'imitation de ce qui a été pratiqué pour les équations du troisieme degré dans le cas irréductible, la division de l'angle en cinq parties égales donne la solution d'une classe d'équations du cinquieme

degré; la division en sept parties égales donne la solution d'une classe d'équations du septieme degré. etc.

180. Problème III. *Connoissant dans le demi-cercle* ACBD (Fig. 86) *les trois cordes* AC, CD, DB, *dont deux partent des extrémités du diametre* AB, *trouver le diametre.*

Soient menées les deux diagonales AD et BC; et nommons AC, a; CD, b; DB, c; l'inconnue AB, x. Les triangles ACB, ADB, étant rectangles en C et D, on a $CB = \sqrt{(xx - aa)}$, $AD = \sqrt{(xx - cc)}$. Or (Géom. 226), $AD \times CB = AB \times CD + AC \times DB$. Par conséquent on aura $\sqrt{(xx - cc)} \times \sqrt{(xx - aa)} = bx + ac$; d'où l'on tire, en quarrant chaque membre, et mettant tous les termes d'un même côté, $x^3 - (aa + bb + cc)x - 2abc = 0$; équation qui se construit par l'article 165.

181. Problème IV. *Décrire un cercle* AMBD (Fig. 87) *qui passe par un point donné* A, *touche l'un des côtés* ET *d'un angle donné* ETD, *et coupe l'autre côté* TD, *de maniere que la corde* BD *soit égale à une ligne donnée* 2a.

Soit C le centre du cercle cherché. Joignons les points donnés A et T, par la droite AT; menons le rayon CM au point d'attouchement M du cercle avec la droite TE; la droite AE, perpendiculaire à TE, ou parallele à CM; la droite CK, perpendiculaire à BD; les deux droites AV, CH, paralleles à TD; et les deux droites AO, CF, paralleles à TE. La droite AO rencontre en O le rayon MC, prolongé. Cela posé, nommons,

lignes connues
- TE . . . . . b,
- AE . . . . . c,
- TA $= \sqrt{(bb + cc)}$ . . . . . d,
- EV . . . . . e,
- AV $= \sqrt{(cc + ee)}$ . . . . . f,

lignes inconnues
- TM . . . . . x,
- CM . . . . . y.

On aura EM ou AO $= b - x$; CO $=$ OM $-$ CM $=$ AE $-$ CM $= c - y$; et le triangle rectangle COA donnera $(CA)^2 = (CO)^2 + (AO)^2$; c'est-à-dire, $yy = (b-x)^2 + (c-y)^2$, ou bien, $o = bb - 2bx + xx + cc - 2cy$; d'où l'on tire, en mettant pour $bb + cc$ sa valeur dd,

$$\text{I.} \quad y = \frac{dd - 2br + xx}{2c}.$$

Les triangles semblables AEV, CHM, donnent

$$AE\,(c) : EV\,(e) :: CM\,(y) : MH = \frac{ey}{c}.$$

Donc, TH, ou GF $=$ TM $-$ MH $= x - \frac{ey}{c} = \frac{cx - ey}{c}$.

Les triangles semblables AEV, CKF, donnent

$$AV\,(f) : AE\,(e) :: CF\left(\frac{cx-ey}{c}\right) : CK = \frac{cx-ey}{f}.$$

Enfin, le triangle rectangle CKB donne $(CB)^2 = (CK)^2 + (BK)^2$. Donc, à cause de $BK = \frac{BD}{2} = a$, on aura $yy = \frac{(ex-cy)^2}{ff} + aa$, ou bien $f^2y^2 = c^2x^2 - 2cexy + e^2y^2 + a^2f^2$, ou bien $c^2y^2 + e^2y^2 = c^2x^2 - 2cexy + e^2y^2 + a^2f^2$, ou bien $c^2y^2 = c^2x^2 - 2cexy + a^2f^2$, ou bien $c^2y^2 = f^2x^2 - e^2x^2 - 2cexy + a^2f^2$, ou bien $c^2y^2 + e^2x^2 + 2cexy = f^2(x^2 + a^2)$; et par conséquent, en tirant la racine quarrée de chaque membre,

$$\text{II.} \quad cy + ex = f\sqrt{(x^2 + a^2)}.$$

Substituant dans cette équation pour y sa valeur donnée par l'équation I, quarrant chaque membre, et ordonnant par rapport à x, on trouvera,

$$x^4 + (4e - 4b)x^3 + \left\{\begin{matrix}(2e-2b)^2 \\ +2d^2 \\ -4f^2\end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix}2d^2(2e-2b)x + d^4 \\ -4a^2f^2\end{matrix}\right\} = 0,$$

équation du quatrieme degré, qui se construit par l'article 165.

182. Problême V. *Diviser un triangle scalene* ABC (Fig. 88) *en quatre parties égales par deux droites* FD, GE, *qui se coupent perpendiculairement en* O.

Des points B, F, G, soient abaissées sur la base AC les perpendiculaires BH, FV, GM; et, du point O, soient menées aux sommets des trois angles du triangle les droites OA, OB, OC. Nommons,

lignes connues { AC . . . . . $2a$, BH . . . . . h, AH . . . . . b, HC $= 2a - b$ . . . . . c,

lignes inconnues { AD . . . . . x, CE . . . . . y.

Puisque le triangle DOE et le quadrilatere EOFA doivent être chacun le quart du triangle ABC, leur somme en sera la moitié; c'est-à-dire qu'on aura, $\frac{AD \times FV}{2} = \frac{AC \times BH}{2 \times 2}$, ou bien, $x \times FV = ah$; et par conséquent, $FV = \frac{ah}{x}$. De même, $GM = \frac{ah}{y}$.

Les triangles semblables AHB, AVF, donnent, BH (h) : AH (b) :: FV ($\frac{ah}{x}$) : AV $= \frac{ab}{x}$. Donc, DV $=$ DA $-$ AV $= x - \frac{ab}{x} = \frac{xx - ab}{x}$.

Les triangles semblables CHB, CMG, donnent, BH (h) : CH (c) :: GM ($\frac{ah}{y}$) : CM $= \frac{ac}{y}$. Donc EM $=$ EC $-$ CM $= y - \frac{ac}{y} = \frac{yy - ac}{y}$.

Les deux triangles rectangles DVF, GME, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables (Géom. 165), et donnent par conséquent,

FV ($\frac{ah}{x}$) : VD ($\frac{xx - ab}{x}$) :: EM ($\frac{yy - ac}{y}$) : GM ($\frac{ah}{y}$).

D'où l'on tire, en faisant le produit des extrêmes et celui des moyens,

I. $(xx - ab) \cdot (yy - ac) = a^2 h^2$.

Cette équation est fondée sur la condition que le triangle

DOE et le trapeze EOFA soient chacun le quart du triangle proposé. Il faut en trouver une seconde, fondée sur la condition que les deux trapezes FOGB, GODC, en soient aussi chacun le quart.

Les deux triangles DOE, DOA, qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases DE, DA (Géom. 129); c'est-à-dire qu'on a (en observant que $DE = AD - AE = x + y - 2a$),

$$DE(x+y-2a) : DA(x) :: DOE\left(\frac{ah}{4}\right) : DOA = \frac{ahx}{4x+4y-8a}.$$

Donc le triangle $AFO = AFD - AOD = \frac{ah}{2} - \frac{ahx}{4x+4y-8a} = \frac{ahx + 2ahy - 4a^2h}{4x+4y-8a}$.

Les deux triangles AOF, FOB, qui ont leur sommet au même point O, sont entre eux comme leurs bases AF, FB, ou comme les lignes AV, VH; c'est-à-dire qu'on a (en observant que $VH = AH - AV = b - \frac{ab}{x} = \frac{bx - ab}{x}$),

$$AV\left(\frac{ab}{x}\right) : HV\left(\frac{bx-ab}{x}\right) :: AOF : FOB;$$

ce qui donne (en mettant pour AOF sa valeur qu'on vient de trouver),

$$FOB = \frac{(x-a).(hx+2hy-4ah)}{4x+4y-8a} = \ldots\ldots = \frac{hx^2 - 5ahx + 2hxy - 2ahy + 4a^2h}{4x+4y-8a}.$$

Semblablement, en comparant le triangle COE avec le triangle DOE, qui est le quart du triangle proposé, on aura l'expression du triangle COE. Retranchant de ce triangle le triangle DOE, on aura le triangle COD; et retranchant ce triangle du trapeze CDOG, qui est le quart du triangle proposé, on aura l'expression du triangle COG. Comparant ce triangle avec le triangle GOB, on aura l'expression de ce dernier. Cette expression est .....

$$\frac{hy^2 - 5ahy + 2hxy - 2ahx + 4aah}{4x+4y-8a}.$$

Maintenant, ajoutons ensemble les expressions des deux triangles FOB, GOB, et égalons la somme à $\frac{ah}{4}$, quart

du triangle proposé ; nous trouverons, toutes réductions faites, l'équation,

II. $x^2 + y^2 + 4xy - 8ax - 8ay + 10a^2 = 0$.

Les deux équations I et II, combinées ensemble, produiront une équation déterminée du huitieme degré. Cette équation est constructible par la méthode de l'article 171. Mais il sera plus court de construire les courbes représentées par les équations I et II. Les points de rencontre de ces deux courbes donneront les valeurs déterminées de x et de y, et par conséquent la position du point O où se croisent perpendiculairement les droites DF, EG, qui doivent diviser le triangle proposé en quatre parties égales.

Fin de l'application de l'algebre à la géométrie.

APPENDIX I.

DE LA MEILLEURE FIGURE DES VOUTES CINTRÉES EN ANSES DE PANIER A TROIS CENTRES.

I. Les cintres des berceaux surbaissés ont, comme on sait la figure elliptique. Mais l'ellipse étant difficile à tracer exactement dans la pratique, on leur substitue souvent une courbe qu'on appelle *anse de panier*, qui ressemble en effet à l'ellipse, et qui est formée de plusieurs arcs de cercle, dont la valeur totale est de 180 degrés. L'usage le plus ordinaire est de former l'anse de panier avec trois arcs de cercle seulement; et l'on n'emploie un plus grand nombre d'arcs que dans le cas où la montée seroit très petite en comparaison du diametre, et rendroit la courbure de trois arcs trop inégale. Je suppose donc que, sur un diametre et une montée donnés, il s'agisse de construire une anse de panier à trois centres; et je me propose de déterminer le rapport qui doit exister entre les rayons des arcs extrêmes et le rayon de l'arc moyen, afin que la courbure de l'anse soit le plus uniforme qu'il est possible.

II. Soient AB et CD (Fig. A) le diametre et la montée de l'anse de panier. Supposons que cette courbe soit construite; que AF et BH soient les arcs extrêmes; FDH l'arc moyen. Les centres K et M des arcs extrêmes doivent être placés sur le diametre AB, afin que la courbe tombe perpendiculairement sur ce diametre, comme l'ellipse; et le centre E de l'arc moyen doit être placé sur la montée DC prolongée, afin que la courbe soit perpendiculaire en D sur la montée, de même que l'ellipse coupe perpendiculairement son petit axe. De plus, le centre E, le centre

K, le point F de raccordement des deux arcs AF, FDH, doivent être en ligne droite, ainsi que le centre E, le centre M, le point H de raccordement des deux arcs BH, FHD, afin que les trois arcs qui forment la courbe se touchent simplement en se raccordant. Cela posé,

$$\text{Soient} \begin{cases} \text{AC} \ldots\ldots = a, \\ \text{CD} \ldots\ldots = b, \\ \text{AK} \ldots\ldots = x, \\ \text{ED} \ldots\ldots = y. \end{cases}$$

Il est clair qu'on doit avoir ED = EF = EH, KF = KA = MH = MB. Or on a, CK = $a - x$, EC = $y - b$, EK = $y - x$; donc, à cause du triangle rectangle ECK, on aura $(y-x)^2 = (a-x)^2 + (y-b)^2$; d'où l'on tire $2ax + 2by - 2xy = aa + bb$; équation entre les deux rayons x et y, par laquelle on voit que connoissant l'un de ces rayons, l'autre sera aussi connu. Il y a diverses manieres de construire en général l'anse de panier, selon que l'un ou l'autre rayon est donné.

III. Maintenant, si l'on veut que la courbure des arcs AF, FDH, soit le moins inégale qu'il est possible, il est visible que le rapport géométrique des rayons y et x doit être le moindre qu'il est possible. Donc, puisque l'équation précédente donne $y = \frac{aa + bb - 2ax}{2b - 2x}$, on aura $\frac{y}{x} = \frac{aa + bb - 2ax}{2bx - 2xx} = minimum$. Donc, par la méthode ordinaire de *maximis* et *minimis*, $-2adx(bx-xx) - (aa + bb - 2ax)(bdx - 2xdx) = 0$; d'où l'on tire facilement $x = \frac{aa + bb \pm (a-b)\sqrt{[aa+bb]}}{2a}$. Donc, en mettant pour x cette valeur dans l'expression de y, on aura $y = \frac{\pm a\sqrt{[aa+bb]}}{a-b\pm\sqrt{[aa+bb]}}$.

On voit qu'à cause du double signe $\pm$, les rayons x et y auront chacun deux valeurs; ce qui fait deux cas.

IV. *Cas I.* Ayant tiré par les points A et D (Fig. B),

la droite indéfinie ADT, on portera CD en CX, et on fera DT = AX; ensuite sur le milieu Z de la droite AT on élevera la perpendiculaire indéfinie ZKF, qui déterminera sur le diametre AB le centre K de l'arc extrême, qui doit passer par le point A, et sur la montée ou son prolongement le centre E de l'arc moyen; en sorte que si, après avoir pris BM = AK, on tire les droites indéfinies KEF, MEH, et que du point E pour centre avec le rayon ED on décrive l'arc FDH, et que des points K et M pour centres avec les rayons KF, MH, on décrive les arcs FVA, HNB, la courbe entiere AVFDHNB sera celle qui satisfait aux deux premieres valeurs de x et y; c'est-à-dire qu'on aura AK ou $BM = \frac{aa+bb+(a-b)\sqrt{[aa+bb]}}{2a}$, $ED = \frac{a\sqrt{[aa+bb]}}{a-b+\sqrt{[aa+bb]}}$.

Car 1°., par construction, $AT = \sqrt{[aa+bb]} + a - b$, $AZ = \frac{\sqrt{[aa+bb]}+a-b}{2}$; et, à cause des triangles semblables, ACD, AZK, AC : AD :: AZ : AK $= \frac{aa+bb+(a-b)\sqrt{[aa+bb]}}{2a}$.

2°. Les triangles semblables ACD, ECK, donnent CD : CA :: CK : CE $= \frac{aa-bb-(a-b)\sqrt{[aa+bb]}}{2b}$; donc ED $= \frac{aa+bb-(a-b)\sqrt{[aa+bb]}}{2b} = \frac{(aa+bb-(a-b)\sqrt{[aa+bb]}) \times (a-b+\sqrt{[aa+bb]})}{2b\ (a-b+\sqrt{[aa+bb]})} = \frac{\sqrt{[aa+bb]} \cdot (\sqrt{[aa+bb]} - (a-b) \cdot \sqrt{[aa+bb]}+a-b)}{2b\ (a-b+\sqrt{[aa+bb]})} = \frac{a\sqrt{[aa+bb]}}{a-b+\sqrt{[aa+bb]}}$.

Il est visible que la courbe que nous venons de tracer ne peut pas être l'anse de panier demandée, parcequ'elle ne ressemble pas à une demi-ellipse, et que les arcs qui la forment se raccordent au-dessous du diametre. Mais cette courbe satisfait au problême où l'on demanderoit de tracer une courbe avec trois arcs de cercle qui passent par les points A, B, D, qui se touchent, et dont la courbure

soit le moins inégale qu'il est possible, sans imposer d'ailleurs la condition que tous ces arcs soient concaves d'un même côté du diametre.

V. *Cas II.* On menera, comme ci-dessus, la droite AD (Fig. C), et on fera CX = CD; mais, au lieu de porter AX sur le prolongement de AD, on portera AX sur la droite DA même, de D en T. Sur le milieu Z de AT on élevera la perpendiculaire indéfinie ZKE, qui déterminera sur le diametre AB le centre K de l'arc extrême AF, et sur le prolongement de la montée le centre E de l'arc moyen FDH. On prendra BM = AK; et ayant tiré par les points E et M la droite indéfinie EMH, du point E pour centre avec le rayon ED on décrira l'arc FDH; du point K pour centre, avec le rayon KF, on décrira l'arc FA; et du point M pour centre avec le rayon MH on décrira l'arc HB : la courbe entiere AFDHB sera l'anse de panier demandée.

Car 1°. $AT = \surd[aa+bb] - (a-b)$; et, à cause des triangles semblables ACD, AZK, on a AC : AD :: AZ : AK = $\frac{aa+bb-(a-b)\surd[aa+bb]}{2a}$.

2°. Les triangles semblables ACD, ECK, donnent CD : AC :: CK : CE = $\frac{aa-bb+(a-b)\surd[aa+bb]}{2b}$; donc ED = $\frac{aa+bb+(a-b)\surd[aa+bb]}{2b} = \frac{a\surd[aa+bb]}{\surd[aa+bb]-(a-b)}$.

La construction géométrique de l'anse de panier que nous venons de donner est fort simple et très facile à exécuter dans la pratique. Mais si on veut déterminer les rayons des arcs par le calcul, la chose est fort aisée.

En effet, dans le triangle rectangle ACD, AC et CD étant donnés, l'hypoténuse AD est aussi donnée. Donc AT est connue; et comme AZ est la moitié de AT, la similitude des deux triangles rectangles ACD, AZK, fera connoître AK. Retranchant AK de AC, on aura CK, par le moyen de laquelle et des deux triangles semblables ACD,

KCE, on connoîtra CE. Ajoutant CD à CE, on aura ED.

Ainsi les rayons AK, ED, seront donnés, ainsi que les angles AKF, FED. Par conséquent, on aura non seulement le nombre de degrés de chacun des arcs AF et FD, mais encore la longueur absolue de ces arcs.

Le cintre du pont exécuté en 1766 à Mézieres sur le fossé de la courtine de l'ouvrage à cornes de l'isle S.-Julien a été tracé suivant la méthode précédente. Il a environ 48 pieds de diametre sur 18 pieds de montée.

APPENDIX II.

Sur l'art de lever les plans et de construire les cartes géographiques.

On appelle en général, *plan d'un terrain*, *carte d'un terrain*, la représentation de ce terrain sur une surface plane et unie, telle qu'une feuille de papier.

Lorsqu'un terrain a peu d'étendue et qu'on peut en conséquence le regarder comme une surface plane, au moins sensiblement, la représentation doit être semblable à l'objet: il faut donc que les arbres, les maisons, les clochers, et autres points remarquables, soient représentés sur le papier dans le même ordre et dans les mêmes proportions de distances qu'ils ont réellement sur le terrain. Ainsi la question consiste alors à construire en petit, sur le papier, une figure qui soit semblable à celle du terrain; de maniere que connoissant le rapport d'une ligne du papier à la ligne homologue du terrain, on connoîtra aussi le rapport de toutes les autres lignes du papier à toutes les autres lignes du terrain: les lignes homologues des figures semblables étant proportionnelles. Mais si on propose de représenter sur le papier une étendue considérable de terrain, comme un royaume, une province, etc., la représentation ne peut pas être semblable à l'objet, parceque le globe de la terre ayant la forme sphérique, une partie (du moins un peu grande) de sa surface n'est pas susceptible de développement sur un plan, ni d'y former une figure qui lui soit semblable. Alors la représentation est nécessairement imparfaite; mais pour remédier à cet inconvénient, on la soumet à des lois qui la rapprochent, autant qu'il est possible, de la nature, et qui servent à faire connoître les distances respectives des objets.

De la levée des terrains peu étendus.

I.

Soit d'abord ACDEB (Fig. 1) un champ, ou une prairie, de grandeur médiocre, qu'il s'agisse de lever, et de rapporter ensuite sur le papier. Il pourra arriver que le contour de cette prairie ne soit pas terminé par des lignes droites; mais alors il faudra la partager en un assez grand nombre de parties AC, CD, DE, EB, BA, pour qu'elles puissent être regardées, sans erreur sensible, comme rectilignes. Ayant choisi à volonté, sur le bord, ou dans l'intérieur de la prairie, un point A duquel on puisse aller aux angles C, D, E, B, désignés par des piquets, par des arbres, par des pierres, ou de toute autre maniere, on dirigera les rayons visuels AD, AE, AB, qu'on marquera sur le terrain par des piquets plantés de distances en distances dans l'alignement de ces rayons; on mesurera, par le moyen d'une *toise* ou tringle de bois ou de fer de 6 pieds de longueur, les lignes AC, CD, AD, DE, AE, EB, AB; on tiendra note de ces mesures, en faisant, à la simple vue, sur le terrain même, un dessin ou *croquis* qui le représente grossièrement. Il s'agira ensuite de mettre ce dessin au net dans la chambre, c'est-à-dire de construire en petit sur le papier un polygone *acdeb* (Fig. 2) qui soit semblable au polygone ACDEB du terrain. Pour cela, on commencera par se donner sur le papier, une ÉCHELLE *mn*, ou une ligne de grandeur connue, qui représente un certain nombre de *toises*. Supposons, par exemple, que la ligne *mn*, *d'un pouce* de longueur, représente 100 *toises*: alors, si la ligne AC a été trouvée de 200 *toises*, il faudra que sa représentation *ac* soit faite double de l'échelle *mn*; si la ligne CD a été trouvée de 300 *toises*, il faudra que sa représentation *cd* soit faite triple de *mn*; ainsi des autres. D'où l'on voit que, connoissant toutes les lignes AC, CD, AD, etc., on pourra les représenter par d'autres lignes plus petites qui leur seront proportionnelles; et que l'on connoî-

tra tous les côtés des triangles *de réduction*, *acd*, *dae*, *eab*. On pourra donc construire tous ces triangles ; et leur assemblage formera une Figure *acdeb* semblable à la Figure ACDEB, puisque les triangles correspondants ACD et *acd*, DAE et *dae*, etc., ayant les côtés proportionnels, sont semblables chacun à chacun (Géom. 168), et que par conséquent les deux polygones ACDEB, *acdeb*, qui sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés, sont semblables.

II.

Les arpenteurs emploient un autre moyen pour lever des terrains d'une plus grande étendue. Ils se servent pour cela d'un instrument qu'on appelle l'*équerre des arpenteurs*, et qui consiste en deux regles perpendiculaires entre elles, solidement liées, portant à leurs quatre extrémités d'autres regles verticales percées de fentes ou de *pinules*, au travers desquelles on observe les objets.

Soit donc ACDBE (Fig. 3) le terrain, dont on veut lever le plan. Vous marquerez, avec des piquets, une ligne AB, de laquelle on puisse voir commodément les objets E, C, D ; vous porterez l'équerre le long de cette ligne, et vous la placerez de maniere que deux pinules étant dans l'alignement AB, vous apperceviez successivement, à travers les deux autres pinules, les objets E, C, D ; ce qui vous donnera les droites IE, GC, HD, perpendiculaires à AB : vous mesurerez, à la toise, ces perpendiculaires ; vous mesurerez aussi les parties AI, AG, AH, HB. Toutes ces mesures étant prises sur le terrain, et marquées sur un croquis, vous formerez, dans la chambre, au moyen d'une échelle, comme pour le cas précédent, une figure qui soit semblable à ACDBE. Sur quoi il faut observer que pour construire des triangles rectangles, il suffit d'avoir les côtés contigus aux angles droits, puisqu'en faisant ces côtés perpendiculaires entre eux, et leur donnant les longueurs convenables, les hypoténuses sont nécessairement déterminées.

III.

Il y a un autre instrument, nommé la *planchette*, qui est fort en usage pour la levée des plans, et qui est d'autant plus commode, que le plan se trouve tout construit par les opérations mêmes qu'on fait sur le terrain. C'est une planche de bois, bien unie, d'environ 18 pouces en quarré, portée par un pied en genouillere, qui permet de la hausser ou de la baisser à volonté. On étend et on fixe sur cette planche la feuille de papier qui doit recevoir le dessin ou le plan. Une regle de cuivre, nommée *alidade*, portant à ses extrémités deux pinules pour observer les objets, se place sur la planchette, et sert à prendre les alignements dont on a besoin.

Ayant mesuré sur le terrain (Fig. 4), une base AB, des extrémités de laquelle on puisse voir un certain nombre d'objets O, C, D, vous mettrez d'abord la planchette au point A, dans une position horizontale. Je suppose que le point *a* réponde perpendiculairement au point A. Vous ferez planter en B, un piquet ou un *jallon*, qu'on puisse appercevoir de *a*, à travers les pinules de l'alidade. Vous prendrez dans l'alignement du point *a* et du jallon B, la droite *ab*, de grandeur connue, pour représenter la ligne AB qu'on a mesurée : vous dirigerez, du point *a*, vers les objets O, C, D, les rayons *a*O, *a*C, *a*D, que vous marquerez sur le papier par des lignes tracées au crayon, ou à l'encre. Cette premiere station faite, vous transporterez la planchette au point B, et vous y ferez une seconde station entièrement semblable à la précédente ; je veux dire que le point *b* étant supposé répondre perpendiculairement au point B, et la droite *ba* étant située dans l'alignement du point *b* avec un jallon planté en A, il faudra diriger vers les points O, C, D, les rayons *b*O, *b*C, *b*D : ces rayons couperont les premiers *a*O, *a*C, *a*D, aux points *o*, *c*, *d* ; et on aura sur la planchette, la Figure *aocdb* semblable au terrain.

Il arrive souvent qu'on ne peut pas voir des extrémités de la base AB, tous les objets qu'on veut lever ; mais après

avoir rapporté, par exemple, la droite AO en *ao*, on connoîtra la droite AO, par le moyen de l'échelle, c'est-à-dire par le rapport qu'a la droite *ao* à la droite *ab*; et on pourra considérer AO comme une base, de sorte que les objets qu'on verra de son extrémité O, pourront encore être marqués sur la carte; ainsi de plusieurs autres bases.

IV.

On voit qu'en multipliant convenablement les opérations, on parviendroit à représenter un terrain dans le plus grand détail. Mais il y a de certains détails qu'on peut remplir d'une maniere plus simple et plus commode, en faisant usage de la *boussole*. On a donc, pour cela, une boîte qui contient une aiguille de fer aimantée, mobile sur un axe ou pivot, et qui porte une regle mobile garnie de deux pinules. La propriété de l'aiguille aimantée est, comme on sait, de se diriger vers le nord, ou du moins de former avec la ligne nord et sud, un angle qui, pour un même lieu et pour un même temps, peut être regardé comme constant; de maniere que l'aiguille, dans ses différentes positions, peut toujours être censée demeurer parallele à sa position initiale.

Je suppose donc que les deux points A et B étant déja levés et rapportés en *a*, *b*, il y ait (Fig. 5) de A vers B, une riviere ou un chemin tortueux AMNPB, qu'il s'agit de détailler. Vous observerez en A, l'angle *z* AM que l'aiguille fait avec la premiere partie AM du chemin; vous transporterez successivement la boussole aux angles ou coudes M, N, P, et vous observerez les angles AM*m*, MN*n*, etc., que les directions M*m*, N*n*, etc., de l'aiguille forment avec les autres parties du chemin; de plus, vous mesurerez les lignes AM, MN, NP, etc. Ensuite, vous rapporterez le tout sur la carte, en soumettant les lignes AM, MN, etc., aux proportions de l'échelle, et en construisant, au moyen d'un petit instrument de corne ou de cuivre nommé *rapporteur*, divisé en degrés et minutes, les angles, tels qu'ils ont été observés sur le terrain.

V.

La levée de la planchette a cet inconvénient, que les angles, et conséquemment les longueurs des lignes qui s'y terminent (à l'exception toutefois de la premiere base qui a été mesurée), étant donnés par des intersections qui peuvent n'être pas parfaitement justes, les positions respectives des objets sur la carte sont quelquefois un peu fautives. Si on veut lever un plan avec une plus grande exactitude, il faudra employer les opérations de la trigonométrie. Ainsi, par exemple, après avoir mesuré très exactement une base AB (Fig. 6), il faudra diriger les rayons visuels AO, AC, AD, BO, BC, BD, vers les objets O, C, D; mesurer par le moyen du *graphometre* ou *d'un quart-de-cercle*, les angles OAC, CAD, etc.; enfin, calculer, par les regles de la trigonométrie, les droites AO, AC, etc. Toutes ces lignes étant connues, on pourra les exprimer en partie d'une même échelle; et alors, pour faire le plan, il ne s'agira que de construire des triangles dont on connoît tous les côtés.

VI.

Si les points A, O, C, D, B étoient placés relativement à l'horizon, à des hauteurs assez différentes les unes des autres, pour qu'on fût obligé d'avoir égard à ces différences, il faudroit commencer par *projeter* tous ces points sur un même plan horizontal; et ensuite on feroit la carte de la figure de *projection*. Je m'explique.

Le choix du plan horizontal destiné à recevoir la projection, est arbitraire; mais, pour plus de simplicité, je prends le plan horizontal qui passe par le point le plus bas de ceux qu'on veut lever, et je suppose, par exemple, que A soit ce point. Concevons donc que par A passe un plan horizontal sur lequel tombent des autres points O, C, D, B, les perpendiculaires O *o*, C *c*, D *d*, B *b*, et menons les droites A *o*, *oc*, A *c*, *cd*, etc. La Figure A *ocdb* A, est ce qu'on appelle la *projection du terrain*; et la ques-

tion est de déterminer les côtés et les angles de cette Figure, pour pouvoir ensuite la réduire et la représenter sur une carte.

D'abord les droites AO, AC, AD, etc., se calculent, comme nous l'avons déja dit, par les regles de la trigonométrie. De plus, on aura eu soin de mesurer, au moyen du quart-de-cercle, ou du graphometre garni d'un fil à plomb, les angles que les droites AO, AC, AD, etc., forment avec la ligne verticale qui passe par le point A; ce qui fait connoître tous les angles des triangles rectangles A*o*O, A*c*C, A*d*D, etc. Ainsi les hypoténuses AO, AC, AD, etc. étant données, on pourra connoître les côtés A*o*, A*c*, A*d*, etc. Reste à trouver les angles de projection *o*A*c*, *c*A*d*, etc.

Considérons le point A (Fig. 7) comme le centre d'une sphere; imaginons que la verticale AZ élevée par le point A, et les droites AO, AC, prolongées, aillent rencontrer la surface de cette sphere, aux points Z, K, H; joignons ces trois points par les trois arcs de grands cercles ZK, ZH, KH; nous aurons un triangle sphérique ZKH, dans lequel on connoîtra les trois côtés; car le côté ZK, est la mesure de l'angle connu que fait AO avec la verticale; le côté ZH est la mesure de l'angle connu que fait AC avec la verticale; et le côté KH est la mesure de l'angle connu OAC que les droites OA, CA forment entre elles. Donc on connoîtra l'angle Z, par le dernier cas de la table II, pour la résolution des triangles sphériques. Or cet angle Z n'est autre chose que l'angle de projection *o*A*c*, puisque les droites *o*A, *c*A sont perpendiculaires au même point A de la section commune AZ, des cercles ZK, ZH.

On déterminera de la même maniere les autres angles de projection *c*A*d*, *d*A*b*.

Construction des cartes géographiques.

I.

Le globe de la terre est, du moins sensiblement, une

sphere qui tourne sur elle-même, en vingt-quatre heures, d'occident en orient; d'où il résulte que le soleil nous paroit tourner, dans le même temps, d'orient en occident. Les extrémités de l'axe de révolution s'appellent les *poles* de la terre; celui qui est du côté du nord est le pole *arctique*, l'autre est le pole *antarctique*.

Le grand cercle perpendiculaire à l'axe de révolution se nomme *équateur*; il partage la terre en deux *hémispheres*, l'hémisphere *septentrional* ou *boréal*, et l'hémisphere *méridional* ou *austral*.

Les petits cercles de la terre, paralleles à l'équateur, s'appellent *les cercles paralleles*, ou simplement les *paralleles*.

Un grand cercle passant par l'axe de révolution, se nomme *méridien*. On voit qu'il y a une infinité de méridiens; et que chaque lieu a son méridien particulier. Chaque méridien partage le globe en deux hémispheres, l'un *oriental*, l'autre *occidental*.

Un grand cercle perpendiculaire à la ligne d'à-plomb d'un lieu, c'est-à-dire à la direction d'un fil qui soutient un poids, s'appelle *horizon* de ce lieu. Le point du ciel, qui répond perpendiculairement à ce même lieu, en est le *zénith*; le point diamétralement opposé, le *nadir*.

II.

La position des lieux sur la surface de la terre dépend de leur *latitude* et de leur *longitude*, combinées ensemble. On appelle *latitude* d'un lieu, l'arc du méridien, compris depuis ce lieu jusqu'à l'équateur; et *longitude* l'arc de l'équateur, compris depuis le méridien jusqu'à un point fixe par où l'on suppose que passe le méridien que l'on regarde comme le premier de tous. On sent que le choix de ce premier méridien est arbitraire. Aussi n'est-il pas le même pour tous les peuples. Il y a une ordonnance de Louis XIII, de l'année 1634, qui enjoint aux géographes François de prendre pour premier méridien celui de l'isle de Fer, la plus occidentale des isles Canaries.

On distingue deux sortes de cartes géographiques : les cartes universelles, ou les *mappemondes*, qui représentent le globe entier ou seulement une de ses moitiés; et les cartes particulieres, qui représentent des espaces moins étendus. La situation des lieux doit être marquée sur les unes et sur les autres par les latitudes et les longitudes, c'est-à-dire, par les intersections des méridiens et des paralleles.

Construction des mappemondes.

III.

Une mappemonde représente les lieux tels qu'ils paroîtroient étant vus d'un point donné dans l'espace. Il faut donc concevoir que d'un œil, placé dans un endroit connu, partent des rayons qui vont aboutir à tous les lieux qu'on veut représenter; et que ces rayons venant à rencontrer une feuille de papier transparent, interposée, y forment la *projection* ou la représentation demandée. Nous allons expliquer la maniere de faire cette projection, ou sur le plan de l'équateur, ou sur celui d'un méridien, ou sur celui d'un horizon : en supposant toujours que l'œil est placé sur l'axe du cercle de projection, c'est-à-dire, sur la perpendiculaire qui passe par le centre de ce cercle. Ces trois problêmes comprennent toutes les mappemondes usitées.

Mappemonde sur le plan de l'équateur.

IV.

En supposant que la carte ne s'étende point au-delà de la circonférence de l'équateur, il est clair, 1°. qu'on ne peut représenter à la fois qu'un hémisphere; 2°. que l'œil doit être placé sur l'axe, du côté opposé à l'hémisphere que l'on projette. Ainsi, par exemple, pour projetter l'hémisphere austral, il faut que l'œil soit placé du côté du pole arctique.

Imaginons que cet hémisphere soit coupé, 1°. par une suite de plans passant par l'axe de l'équateur; 2°. par une suite de plans perpendiculaires à ce même axe. Les plans de la premiere espece forment des demi-méridiens sur la surface de l'hémisphere; et leurs rencontres avec le plan de l'équateur sont des lignes droites suivant lesquelles l'œil voit ces demi-méridiens, sur le plan de l'équateur. Les plans de la seconde espece, forment sur la surface de l'hémisphere, des cercles paralleles; et ces cercles vus sur le plan de l'équateur, sont d'autres cercles d'un rayon plus petit. Cela étant bien conçu, la carte se construit ainsi.

Du point *c* pour centre (Fig. 8), et d'un rayon pris à volonté, décrivez le cercle 0, 1, 2, 3, etc. qui représente l'équateur; divisez sa circonférence en degrés (ici, pour abréger, nous ne la divisons qu'en 12 parties); et menez les rayons *c*0, *c*1, *c*2, *c*3, etc. Ces rayons marquent les *méridiens* des lieux 0, 1, 2, 3, etc.

Pour tracer les paralleles, menez les deux diametres 06, 39, perpendiculaires entre eux. L'œil étant supposé éloigné du centre *c*, d'une quantité donnée, prenez sur le rayon *c*9 la partie *c*S égale à cette quantité, et menez du point S, aux points 1, 2, 3, 4, etc. les droites S1, S2, etc. qui rencontrent le diametre 06 aux points *a*, *b*, etc: vous verrez facilement que les cercles *ahek*, *bldm*, etc. décrits du point *c*, avec les rayons *ca*, *cb*, etc. représentent les *paralleles* des lieux qui ont des latitudes égales aux arcs 01, 02, etc.

On achevera la carte, en y plaçant (au moyen d'une bonne table de latitudes et de longitudes) les lieux, tels qu'ils sont placés sur la terre. Ceux qui sont à la circonférence d'un même parallele ont la même latitude, et ceux qui sont à la circonférence d'un même méridien ont la même longitude.

L'hémisphere boréal se projettera de la même maniere sur une carte à part; la seule différence est que l'œil sera placé du côté du pole antarctique.

La plupart des auteurs, qui ont employé cette projection, supposent que l'œil est placé à l'un des poles de l'équateur; ce qui rend les degrés égaux des méridiens, inégaux sur la carte. On peut remédier, du moins en partie, à cet inconvénient, en plaçant l'œil sur le prolongement de l'axe de l'équateur, à une distance du pole, égale au sinus de 45°.

Mappemonde sur le plan d'un méridien.

V.

Prenons, par exemple, le méridien de l'isle de Fer, ou le premier méridien, pour le plan de la carte; et supposons d'abord qu'il faille projeter l'hémisphere oriental, qui contient l'ancien *monde* ou *continent*, c'est-à-dire l'Europe, l'Asie et l'Afrique : il faudra que l'œil soit placé sur l'axe du méridien proposé, du côté du pole occidental; nous le supposerons placé à ce pole même. La question est de déterminer les projections ou les courbes suivant lesquelles l'œil voit les demi-méridiens et les demi-paralleles compris dans l'hémisphere oriental.

Supposons (Fig. 9) que SBKC soit un grand cercle de la terre, que nous considérons, 1°, comme l'équateur; soient SK, BC, deux diametres perpendiculaires entre eux; S, le lieu de l'œil; le triangle isoscele SBC, le triangle par l'axe du cône qui a son sommet à l'œil S, et pour base le premier méridien, lequel coupe perpendiculairement l'équateur suivant BC; le triangle SED, le triangle par l'axe du cône scalene qui a son sommet à l'œil S, et pour base le méridien qui coupe perpendiculairement l'équateur suivant ED. La moitié de ce méridien, celle qui répond à AE, se trouve dans l'ancien continent que nous considérons; l'autre moitié, qui répond à AD, est dans l'hémisphere opposé. Les angles SNA, SDE sont égaux, puisque le premier a pour mesure la moitié du quart de circonférence SDC, plus la moitié de l'arc BE, et que le

second a pour mesure la moitié du quart de circonférence SHB, plus la moitié de l'arc BE. Ainsi le cône scalene dont SED est le triangle par l'axe est coupé *antiparallèlement* (1) à sa base par le plan du premier méridien ; et par conséquent la projection du demi-méridien quelconque, qui répond à AE, est un arc de cercle. De plus on voit que cet arc doit passer par le point N, et par les deux poles de l'équateur.

2°. Considérons le cercle SBKC comme le méridien qui coupe perpendiculairement le premier méridien : soit menée la corde FH parallele à KS ; et soient tirées les droites SF, SH : il est évident que FH est le diametre d'un parallele dont une moitié, celle que nous considérons, répond à MF, l'autre à MH ; et que le triangle SFH est le triangle par l'axe d'un cône scalene dont l'œil S est le sommet, et la base, le parallele en question. Or, à cause des angles égaux SOM, SHF, il s'ensuit que le cône scalene correspondant au triangle SFH est coupé antiparallèlement à sa base par le plan de projection, et que par conséquent la projection du demi-parallele quelconque, correspondant à MF, est un arc de cercle. De plus on voit que cet arc doit passer par les trois points F, O, H.

De là résulte cette construction. Du pont *c* pour centre (Fig. 10), avec un rayon pris à volonté, décrivez le premier méridien o369; divisez sa circonférence en tous ses degrés (nous ne la divisons qu'en douze parties 01, 12,

(1) Un cône scalene SAKBH (Fig. A) est dit coupé *antiparallèlement* à sa base, quand le plan sécant, supposé perpendiculaire au triangle par l'axe SAB, rencontre ce triangle suivant une droite OE, qui fait avec le côté SB, un angle SEO égal à l'angle SAB que la base BA fait avec l'autre côté SA. Alors, la base AKBH du cône étant supposée circulaire, la section OME*p* est un cercle : car, si après avoir mené l'ordonnée PM perpendiculaire à OE, on fait passer par PM, le plan CMD*x* parallele à la base AKBH, la courbe CMD*x* sera un cercle, et on aura $(PM)^2 = PC \times PD$. Or, à cause des triangles semblables PCO, PED, on a PC : PE :: PO : PD; ce qui donne $PC \times PD = PE \times PO$; donc $(PM)^2 = PE \times PO$; donc la courbe OME*p* est un cercle.

23, etc. pour abréger); menez les deux diametres 06, 39, perpendiculaires entre eux.

Cela posé, 1°. de l'une 9 des extrémités du diametre 39, menez à tous les points 1, 2, 3, etc. de division de la demi-circonférence 036, les droites 91, 92, 93, etc. qui rencontrent le diametre 06, aux points *a*, *b*, *c*, etc. Ensuite faites passer un arc de cercle par les trois points 9, *a*, 3; cet arc sera la projection du demi-méridien, qui répond au point 1. Ainsi de suite pour les autres demi-méridiens. On voit que la projection du demi-méridien qui répond au point 3 est le diametre 93.

2°. De l'extrémité 6 du diametre 06, menez à tous les points de division 2, 1, 0, etc. de la demi-circonférence 309, les droites 62, 61, 60, etc. qui rencontrent le diametre 39, aux points *h*, *f*, *c*, etc. Ensuite, par les trois points 1, *f*, 5, faites passer un arc de cercle; cet arc sera la projection du demi-parallele qui répond aux points 1, 5; ainsi de suite pour les autres demi-paralleles.

On placera, par le moyen de la table des latitudes et des longitudes, les lieux sur la carte, comme ils sont placés sur le globe.

L'hémisphere occidental, qui contient l'Amérique, se projettera de même; mais il faudra placer l'œil au pole oriental du méridien de l'isle de Fer.

Cette projection a, sur la premiere, l'avantage de représenter d'une maniere un peu plus vraie la position respective des lieux. Aussi a-t-elle été employée par un grand nombre de géographes, entre autres par Guillaume de l'Isle.

Mappemonde sur le plan d'un horizon.

VI.

Supposons, par exemple, qu'il faille construire une mappemonde sur l'horizon de la ville de Paris, et que l'œil soit placé au pole de ce cercle, qui est opposé à Paris.

1°. Soient (Fig. 11) KH un diametre de la terre, com-

mun à l'horizon de Paris, et à un méridien quelconque; SKMH, un grand cercle passant par HK, et par l'œil qui étant placé au pole opposé à Paris se trouve en S, extrémité du diametre SM perpendiculaire à KH. Imaginons un cône scalene qui ait son sommet en S, et pour base le méridien proposé; coupons ce cône par un plan passant par SA et perpendiculaire à KH; la section, qui est le triangle par l'axe du cône, étant supposée couchée sur le plan SKMH pourra être représentée par un triangle tel que SCB qui a pour base le diametre quelconque BC, et pour côtés les droites SC, SB. Alors on voit qu'à cause des angles égaux SIA, SBC, notre cône est coupé antiparallèlement à sa base par le plan de projection. D'où il suit que les projections des méridiens sont des cercles. De plus, la projection d'un demi-méridien quelconque, compris dans l'hémisphere que nous considérons, est un arc de cercle qui doit passer par les deux intersections de ce demi-méridien avec l'horizon de Paris, et par la projection du pole arctique sur ce même horizon. La projection du méridien de Paris est une simple ligne droite.

2°. Considérons le cercle SKMH comme le méridien de Paris; soient M, cette ville; P, le pole arctique; PR, l'axe de la terre; EF perpendiculaire à PR, la section de l'équateur avec le méridien de Paris; QT aussi perpendiculaire à PR, la section d'un parallele quelconque avec le même méridien; menons les droites SE, SF, SQ, ST. Les deux cônes scalenes, qui ont leurs sommets en S, et pour bases, l'un l'équateur, l'autre le parallele représenté par QT, sont coupés antiparallèlement à leurs bases, par le plan KH de projection; car les deux angles SGA, SFE, sont égaux; et de même les deux angles SOL, STQ, sont égaux. Ainsi les projections de l'équateur et des paralleles sont encore des cercles.

De là suit cette construction. Soient le cercle ZHXK (Fig. 12), le plan de projection, ou le grand cercle de la terre, dont la ville de Paris est l'un des poles; le diametre ZX, la projection du méridien de Paris; et soit mené le diametre HK perpendiculaire à ZX. Divisez la circonférence

ZHXK en 360 degrés aux points Z, *a*, *b*, etc. ; puis menez du point K, à tous les points de division de la demi-circonférence ZHX, les droites K*a*, K*b*, etc., qui divisent le diametre ZX en 180 parties ou degrés, aux points *p*, *q*, etc. En supposant que la latitude de Paris soit de 49 degrés (1), il est clair que si l'on prend sur le diametre ZX, 49 degrés de Z en P, le point P sera la projection du pole arctique.

Maintenant, 1°. faites passer par le pole P, et par les points *a* et *k* correspondants dans les deux demi-circonférences ZHX, ZKX, un arc de cercle : cet arc représentera le demi-méridien qui répond aux points *a* et *k* ; ainsi des autres.

2°. La partie ZP du diametre ZX étant de 49 degrés, vous écrirez 41 au point Z ; et, allant de Z en P, vous écrirez sur tous les points qui marquent les degrés du diametre ZX, les nombres 42, 43, 44, etc., jusqu'à ce que vous soyez arrivé au pole P où vous mettrez 90 ; vous continuerez votre marche, et vous écrirez successivement sur tous les degrés de division, les nombres 89, 88, 87, etc., jusqu'à ce que vous soyez arrivé à zéro, que je suppose tomber au point *s* ; et de *s* en X, les nombres 1, 2, 3, etc. Le point *s* représentera l'intersection du méridien de Paris avec l'équateur. Vous prendrez les intervalles des nombres correspondants dans PX et PZ*z* ; et sur ces intervalles, comme diametres, vous décrirez des cercles ou portions de cercles qui représenteront les paralleles ou portions de paralleles.

Construction des cartes particulieres.

VII.

Les quatre parties du monde, l'Europe, l'Asie, l'Afrique et l'Amérique, se projettent séparément, suivant les mêmes principes que les mappemondes : il n'y a de différence, sinon que les dimensions de la carte sont plus grandes, et que les objets s'y voient plus distinctement.

---

(1) La latitude de l'observatoire de Paris est de 48° 50′ 14″.

Les cartes de royaumes et de grandes provinces se construisent ordinairement ainsi :

Premièrement, on tire au bas du plan une ligne droite qui puisse représenter la longitude, et qui serve de bornes à la partie méridionale du pays qu'on veut décrire ; ensuite on prend sur cette ligne autant de parties égales que le pays comprend de degrés de longitude ; au milieu de cette même ligne on éleve une perpendiculaire sur laquelle on prend autant de parties égales que le pays contient de degrés de latitude ; et comme ces parties représentent les degrés d'un médien qui est un grand cercle de la terre, tandis que les parties de la premiere ligne représentent les degrés d'un parallele qui est un petit cercle, il est évident que les parties d'une ligne ne doivent pas être égales aux parties de l'autre, mais que les parties du parallele doivent être aux parties du méridien, comme le rayon du parallele est au rayon de la terre, ou comme le cosinus de la latitude du parallele est au sinus total. On mene par l'extrémité supérieure de la seconde ligne une perpendiculaire sur laquelle on prend des parties égales qui soient aux parties du méridien, comme le cosinus de la latitude du dernier parallele est au sinus total ; on mene par les points de divisions des deux lignes paralleles, des lignes droites qui représentent les méridiens ; et par les points de division de la perpendiculaire du milieu, on mene parallèlement aux bases, des lignes droites qui représentent les cercles de latitude.

Les cartes de très petites étendues de pays se construisent comme nous l'avons expliqué dans la premiere partie de cet appendix.

FIN.

TABLE.

INTRODUCTION page 1

PREMIERE PARTIE.

Des lignes.

CHAPITRE PREMIER. *Du rapport de grandeur des lignes.* 10
CHAP. II. *Propriétés de la rencontre de deux lignes droites.* 12
CHAP. III. *Caracteres de la parfaite égalité de deux figures, fondés sur la grandeur et la position des lignes qui les terminent.* 18
CHAP. IV. *Des lignes paralleles.* 21
CHAP. V. *Valeur des angles d'un triangle, ou d'un polygone; dépendance générale et mutuelle des angles et des côtés, dans un même triangle, ou dans deux triangles égaux en partie; etc.* 25
CHAP. VI. *De la rencontre des lignes droites avec des lignes circulaires, et de la rencontre mutuelle des lignes circulaires.* 33
CHAP. VII. *Usage de la circonférence du cercle, pour mesurer et comparer les angles : problémes divers.* 40

SECONDE PARTIE.

Des surfaces.

CHAP. I. *Mesure de la surface d'un polygone quelconque.* 52
CHAP. II. *Comparaison des figures semblables.* 61
CHAP. III. *Propriétés particulieres du triangle rectangle; usage de ces propriétés.* 83
CHAP. IV. *Continuation du même sujet; valeur de certains quarrés relativement aux lignes ou portions de lignes sur lesquelles ils sont construits.* 91
CHAP. V. *Propriétés de certaines lignes, par rapport au cercle.* 97
CHAP. VI. *Propriétés de certains polygones, par rapport au cercle.* 102
CHAP. VII. *Méthode pour trouver le rapport approché de la circonférence du cercle au diametre.* 108
CHAP. VIII. *De la transformation, multiplication et division des figures.* 113
CHAP. IX. *De quelques questions qui concernent les* Maxima *et les* Minima *dans les figures.* 120

TABLE.

TROISIEME PARTIE.

Des solides.

CHAP. I. *Des plans.* page 131
CHAP. II. *Du prisme.* 147
CHAP. III. *De la pyramide.* 155
CHAP. IV. *De la sphere.* 174
CHAP. V. *Comparaison des surfaces et des solidités des corps semblables.* 184
CHAP. VI. *Des polyédres réguliers.* 189

QUATRIEME PARTIE.

De la trigonométrie. 196

SECTION PREMIERE.

De la trigonométrie rectiligne.

CHAP. I. *Principes généraux de la trigonométrie rectiligne.* ibid.
CHAP. II. *Détermination des sinus, cosinus, tangentes, etc. par le moyen du rayon.* 204
CHAP. III. *De la résolution des triangles rectilignes.* 215

SECTION II.

De la trigonométrie sphérique.

CHAP. I. *Notions préliminaires.* 228
CHAP. II. *Résolution des triangles sphériques.* 231

APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER. *Principes généraux de l'application de l'Algebre à la Géométrie.* 247
CHAP. II. *Solutions de plusieurs problémes déterminés des deux premiers degrés.* 251
CHAP. III. *Des problémes indéterminés à deux variables; des lignes courbes en général.* 288
CHAP. IV. *Des sections coniques.* 301
CHAP. V. *Des problémes déterminés qui passent le second degré.* 355
APPENDIX I. *Cintres en anses de panniers, etc.* 378
APPENDIX II. *Levée des plans, etc.* 383

Fin de la Table.

LETTRE

Du cit. CARNOT, *membre de l'institut national, ministre de la guerre,*

Au cit. Bossut, membre de l'institut national, examinateur du corps du génie.

30 fructidor an 8 de la république française.

LORSQUE vous m'annonçâtes dernièrement, mon cher collegue, la nouvelle édition de votre cours de mathématiques, je vous parlai de quelques propriétés des triangles et des polygones en général, non encore connues, et que je croyois susceptibles de trouver place dans un traité élémentaire de géométrie. Vous me témoignâtes le desir de les connoître : je vais essayer de vous satisfaire ; mais mes occupations obligées ne me laissant que très peu de moments, je suis forcé d'abandonner le détail des démonstrations, d'ailleurs très faciles à suppléer par les jeunes gens qui auront étudié votre cours, et de me borner à l'énoncé des propositions avec quelques développements.

1. L'objet de la trigonométrie est de trouver les rapports qui existent entre les quantités linéaires et les quantités angulaires d'un triangle, et en général d'une figure quelconque : celui que je me suis proposé a été de trouver séparément ceux de ces rapports qui existent entre les quantités linéaires seulement, sans faire intervenir dans le calcul les quantités angulaires.

Une figure quelconque étant tracée, supposons qu'on ne connoisse aucun des angles, mais que, parmi les côtés ou quantités linéaires de la figure, on ait assez de données pour que toutes les autres quantités linéaires de cette même figure soient déterminées : on trouvera chacune d'elles par les regles de la trigonométrie, en exprimant d'abord par des

équations les rapports qui existent entre les angles et les côtés de la figure ; puis combinant ces équations par les regles ordinaires de l'algebre, afin d'éliminer celles de ces inconnues qui doivent disparoître : mais, par hypothese, dans le cas proposé, toutes les quantités angulaires sont au nombre des inconnues ; donc elles doivent toutes disparoître de l'équation finale qui doit donner chacune des quantités linéaires cherchées ; donc cette équation finale ne renfermera que des quantités linéaires. Or ce sont ces équations finales que je me propose de rechercher directement, c'est-à-dire sans l'intervention des quantités angulaires, lesquelles en effet ne figurent qu'auxiliairement dans le calcul, puisqu'après les y avoir introduites on est obligé de les éliminer pour parvenir au résultat cherché. Mon objet est donc, comme je l'ai déja dit ci-dessus, de trouver séparément, et sans recourir aux quantités angulaires, les rapports qui existent entre les quantités linéaires d'une figure quelconque proposée.

2. Commençons par la plus simple des figures, le triangle. Les côtés de cette figure ne sont liés par aucun rapport indépendant des quantités angulaires ; c'est-à-dire qu'il n'existe aucune équation entre les trois côtés du triangle seuls : autrement deux d'entre eux étant donnés, on pourroit trouver le troisieme ; ce qui n'est pas, puisque dans tout triangle il faut nécessairement que trois des six choses à considérer soient connues pour trouver le reste.

3. Passons donc à l'examen du quadrilatere. Soit BCDF (Fig. 1) ce quadrilatere : concevons tous ses côtés indéfiniment prolongés ; ils se couperont réciproquement, et il en résultera visiblement une figure dans laquelle il y aura douze quantités linéaires à considérer ; savoir, les quatre côtés BC, CD, DF, FB, du quadrilatere, et les huit segments formés deux à deux sur chacun de ces côtés ; savoir, BG et CG pour le côté BC ; AC et AD pour le côté CD ; GD et GF pour le côté FD ; et enfin AB et AF pour le côté BF. Or de ces douze quantités il est facile de voir que cinq étant

connues, indépendantes les unes des autres, les sept autres seront déterminées. Donc il existe entre les côtés du quadrilatere et leurs segments respectifs sept rapports nécessaires, c'est-à-dire sept équations au moyen desquelles, cinq de ces quantités étant connues, on peut trouver toutes les autres : mais de ces sept équations il y en a déja quatre qui résultent évidemment de la construction même ; ces quatre équations expriment que chacun des côtés du quadrilatere proposé est égal à la différence de ses segments : ce sont $BF=AF-AB$, $BC=BG-CG$, $CD=AD-AC$, $DF=GF-GD$. Il reste donc à trouver trois nouvelles équations : on peut les obtenir, ou par les regles de la trigonométrie, en faisant intervenir dans le calcul les sinus des angles de la figure pour les éliminer ensuite, ou directement par la seule comparaison des quantités linéaires.

Premiere méthode.

Le triangle ABC donne $AB : AC :: \sin. C : \sin. B.$
Le triangle BFG donne $FG : BF :: \sin. B : \sin. G.$
Le triangle CDG donne $CD : GD :: \sin. G : \sin. C.$

Multipliant ces trois proportions et réduisant, on aura
$AB.FG.CD=AC.BF.GD.$
Par la même raison, on aura ces trois autres équations
$BC.AF.GD=CG.AB.FD,$
$DF.GB.CA=GF.CB.DA,$
$AF.CD.BG=BF.AD.CG.$

Ces quatre équations existent donc entre les quantités linéaires de la figure : mais l'une quelconque de ces quatre équations est implicitement renfermée dans les trois autres ; car si on multiplie par exemple les trois premieres entre elles, le produit sera la derniere. Ainsi ces quatre équations se réduisent à trois, qui sont les trois équations cherchées.

Seconde méthode.

Du point D menons DK parallele à GB. Les triangles semblables FKD, FBG, donneront FD : KD :: FG : BG.

De même les triangles semblables ABC, AKD, donneront KD : AD :: BC : AC.

Multipliant ces deux proportions, on a FD. AC. BG = AD. FG. BC, qui est l'une des trois équations trouvées ci-dessus; les autres se trouvent de la même maniere.

4. Pour mettre ces équations sous la forme d'un théorême dont l'application soit facile, il faut considérer qu'après avoir prolongé indéfiniment les côtés d'un quadrilatere quelconque BCDF, on peut le regarder comme un triangle ABC, dont les côtés sont indéfiniment prolongés, et coupés par une transversale commune FG, qui est le quatrieme côté du quadrilatere aussi indéfiniment prolongé. Cela posé, il est évident que nous pouvons énoncer la proposition comme il suit.

Théorême I.

5. *Les trois côtés d'un triangle quelconque* (ABC) *étant prolongés indéfiniment, si l'on mene une transversale indéfinie* (FG) *qui les coupe tous trois* (*aux points* F, D, G), *il résultera de cette construction sur chacun des côtés du triangle deux segments :* (savoir, pour le côté AB, les segments AF, BF; pour le côté AC, les segments AD, CD; et pour le côté BC, les segments BG, CG). *Or de ces six segments le produit formé de trois d'entre eux comme facteurs est égal au produit formé des trois autres, en prenant ces facteurs de maniere qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle, ou un même point de la transversale* (c'est-à-dire que l'on a AF. CD. BG = BF. AD. CG; où l'on voit qu'aucune des lettres A, B, C, D, F, G, qui forment les angles

du triangle et les intersections des côtés avec la transversale n'entre deux fois dans le même produit).

En effet il est clair que ce théorême n'est autre chose que la traduction en langage ordinaire des équations trouvées n°. 3.

6. Après avoir résolu pour le quadrilatere le problême que nous nous étions proposé, qui étoit de trouver les rapports qui existent entre les quantités linéaires qui le composent, dégagés des quantités angulaires, passons aux polygones d'un plus grand nombre de côtés.

Soit le pentagone : en considérant trois à trois les côtés de ce pentagone indéfiniment prolongés, ils formeront un triangle, et chacun des autres côtés de ce pentagone pourra être considéré comme une transversale coupant les trois côtés de ce triangle. Donc le théorême ci-dessus lui sera applicable, c'est-à-dire que les côtés de ce pentagone considérés quatre à quatre donneront trois équations comme celles trouvées ci-dessus ; donc on aura pour tout le pentagone autant de fois trois équations de ce genre qu'on peut combiner de fois quatre à quatre les côtés d'un pentagone, c'est-à-dire cinq. Donc le pentagone fournira entre les seules quantités linéaires de la figure quinze équations qui résoudront pour ce pentagone le même problême que celui que nous venons de résoudre ci-dessus pour le quadrilatere.

7. Le même raisonnement s'applique évidemment aux polygones d'un plus grand nombre de côtés ; car, en prolongeant indéfiniment les côtés, ils formeront trois à trois un triangle qui, comparé successivement à chacun des autres côtés de la figure pris pour transversale, donnera trois équations comme celles trouvées ci-dessus. Donc on aura autant de fois trois équations de ce genre qu'on peut combiner de fois quatre à quatre les côtés de ce polygone. Si donc le nombre de ces côtés est n, le nombre des équations sera $\frac{n(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ Ainsi le problême que nous nous étions proposé se trouve résolu pour tous les cas.

8. Il est à remarquer que toutes les équations que fournit cette théorie sont à deux termes, et que chacun de ces deux termes est le produit de trois facteurs. Chaque polygone fournit de plus d'autres équations également à deux termes, mais ayant un plus grand nombre de facteurs : c'est ce qui résulte du théorême suivant, dont la démonstration est analogue à celle du théorême premier, donnée ci-dessus, dont il n'est qu'une extension.

Théoréme II.

9. *Si dans le plan d'un polygone quelconque on mene une transversale qui coupe tous les côtés prolongés s'il le faut, il en résultera sur chacun de ces côtés deux segments, et par conséquent il y aura en tout un nombre de segments double du nombre des côtés du polygone. Cela posé, le produit formé par la moitié de tous ces segments comme facteurs est égal au produit formé par l'autre moitié, en prenant tous ces segments de maniere que dans chacun des deux produits il n'entre jamais deux de ces segments qui aient pour extrémités un même angle du polygone ou un même point de la transversale.*

10. Supposons, par exemple, qu'on ait un exagone: concevons une droite ou transversale tracée dans le même plan; prolongeons chacun des côtés du polygone jusqu'à la rencontre de cette transversale; il en résultera douze segments, c'est-à-dire deux sur chacun des côtés. Or je dis que le produit formé par six de ces segments comme facteurs est égal au produit formé des six autres, en les prenant de maniere qu'aucune des lettres prises pour désigner, soit les angles du polygone, soit les points d'intersection de la transversale par ses côtés prolongés, n'entre deux fois dans le même produit.

Si l'on considere séparément cinq des côtés de cet exagone, et le sixieme comme une transversale coupant tous les côtés du pentagone formé par ces cinq côtés prolongés s'il est nécessaire, on pourra appliquer à ce pentagone le

même raisonnement que ci-dessus, et il en résultera une équation encore à deux termes, mais dont chaque terme aura cinq facteurs seulement.

Il est facile d'appercevoir l'application de cette théorie aux polygones en général, quel que soit le nombre de leurs côtés.

Cette même théorie est également applicable, avec quelques modifications, aux polygones gauches, c'est-à-dire dont tous les côtés ne sont pas dans le même plan; mais ce détail me meneroit trop loin.

Voici maintenant quelques conséquences qui résultent des propositions précédentes.

Théorême III.

11. *Si dans le plan d'un triangle quelconque* (ABC) (Fig. 2 et 3), *on prend à volonté, soit sur l'aire de ce triangle, soit en dehors, un point* (D), *et qu'on mene de ce point à chacun des angles du triangle une droite prolongée, s'il est nécessaire, jusqu'à la rencontre du côté opposé, il résultera de cette construction six segments formés sur les côtés du triangle; deux pour chacun* (savoir AF et BF pour le côté AB; AG et CG pour le côté AC; BH et CH pour le côté BC). *Cela posé, de ces six segments le produit formé par trois d'entre eux comme facteurs est égal au produit formé des trois autres, en les prenant de maniere que dans chacun de ces produits il n'y ait pas deux facteurs qui aient pour extrémités un point commun*, c'est-à-dire qu'on aura AF. BH. CG = BF. CH. AG.

En effet, par le théorême premier, le triangle AFD, dont les trois côtés sont coupés par la ligne BC, donne :

AB. DH. FC. = BF. AH. DC.

Par la même raison les triangles FBD, BDH, CDH, CDG, ADG, donneront

AF. BG. DC. = AB. DG. FC,
DG. BC. AH = BG. CH. AD,
BH. CF. AD. = BC. DF. AH,
AC. FD. BG = AG. CF. BD,
CG. AH. BD = AC. DH. BG,

Multipliant ces six équations toutes ensemble, et réduisant, on aura AF. BH. CG = BF. CH. AG. Ce qu'il falloit prouver.

Théorême IV.

12. *Si de chacun des angles d'un triangle* ABC (Fig. 2) *on mene sur le côté opposé une perpendiculaire, et qu'on prolonge indéfiniment ces trois perpendiculaires* AH, BG, CF; 1°. *elles se couperont toutes en un même point* D; 2°. *la somme des distances* AD, BD, CD, *de ce point aux trois angles* A, B, C, *sera égale au diametre du cercle circonscrit, plus le diametre du cercle inscrit*, c'est-à-dire qu'en nommant R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, on aura $2R + 2r = AD + BD + CD$.

Dans cette proposition on suppose que les trois angles du triangle sont aigus. S'il y en avoit un d'obtus comme C, (Fig. 3) la distance CD de cet angle au point de concours D deviendroit négative, c'est-à-dire qu'on auroit alors $2R + 2r = AD + BD - CD$.

On peut de la premiere partie de cette proposition tirer une méthode particuliere et facile d'abaisser d'un point pris hors d'une droite une perpendiculaire sur cette droite.

Théorême V.

13. *Si de chacun des angles d'un triangle* ABC (Fig. 4) *on mene au point milieu du côté opposé une droite*; 1°. *ces trois droites* AH, BG, CF, *se croiseront toutes en un même point* D; 2°. *la somme des quarrés des distances de ce point aux angles* A, B, C, *sera le tiers de la somme des quarrés des trois côtés du triangle, c'est-à-dire qu'on aura* $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{1}{3}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)$.

Théorême VI.

14. *Dans tout quadrilatere* ABDC (Fig. 5) *le produit des deux distances de l'un quelconque des angles aux points de concours des côtés partant de ce même angle, avec les côtés respectivement opposés, est au produit des deux distances de l'angle opposé en diagonale aux mêmes points de concours, comme le produit des deux côtés du quadrilatere adjacents au premier de ces angles est au produit des deux autres côtés;* c'est-à-dire qu'on aura, par exemple, CF. CG: BF. BG :: CA. CD : BA. BD.

En effet par le théorême premier, nous avons CF. BD. AG = CA. FD. BG

et DF. BA. CG = BF. GA. DC.

Multipliant ces deux équations, et réduisant, on a BA. BD. CF. CG = BF. BG. CA. CD. Donc, etc.

15. Il est à remarquer que ce théorême est applicable, ainsi que ceux qui doivent suivre, au quadrilatere pris dans un sens plus étendu qu'on ne le fait ordinairement. Soient quatre points A, B, C, D, pris à volonté dans un même plan; qu'on prenne ces quatre points dans quel ordre on voudra, comme par exemple A, D, C, B; qu'on joigne ensuite le premier A et le second D par une droite AD; le second D et le troisieme C par une droite DC; le troisieme C et le quatrieme B par une droite CB; et enfin le quatrieme B et le premier A par une droite BA : la figure ADCBA sera ce que j'appelle un quadrilatere.

Il suit de là que quatre droites AB, AC, BD, DC, tracées à volonté dans un plan, et prolongées indéfiniment, forment entre elles trois quadrilateres; savoir, ABDC, CFBG, qui a un angle rentrant; et AFDG, qui forme la figure de deux triangles opposés par le sommet.

Or tous ces quadrilateres ont essentiellement les mêmes propriétés, et les théorêmes II et VI particulièrement leur sont également applicables.

En partant de la définition précédente, j'entends par dia-

gonale d'un quadrilatere toute droite qui joint les angles opposés, c'est-à-dire le premier et le troisieme, ou le second et le quatrieme. Ainsi FG est diagonale du quadrilatere CFBG, puisqu'elle joint le second et le quatrieme angle ; elle est également diagonale du quadrilatere GAFD, puisqu'elle joint le premier et le troisieme angles.

Par conséquent les trois quadrilateres ABDC, CFBG, AFDG, formés par les quatre droites AB, BD, AC, CD, indéfiniment prolongées, ont chacun deux diagonales ; ce qui fait en tout six diagonales, lesquelles se réduisent à trois, parceque chacune d'elles appartient en même temps à deux des trois quadrilateres ; ces trois diagonales sont AD, BC, FG.

Théorême VII.

16. *Dans toute figure formée par l'assemblage de quatre droites tracées dans un même plan, si l'on mene les trois diagonales des quadrilateres qui en résultent et qu'on prolonge indéfiniment ces diagonales, chacune d'elles sera coupée par les deux autres en segments proportionnels.*

Soient (Fig. 5) AB, AC, BD, CD, les quatre droites tracées dans un même plan : ABDC, CFBG, AFDG, seront les trois quadrilateres qui en résulteront, et leurs trois diagonales seront AD, CB, FG. Or je dis qu'en prolongeant, par exemple, les deux premieres AD, CB, jusqu'à la rencontre de la troisieme FG aux points m, n, on aura $Fm : Gm :: Fn : Gn$; c'est-à-dire que les deux segments Fm, Gm, formés par l'intersection m de la premiere diagonale CB sur la troisieme FG, sont entre eux comme les segments respectifs Fn, Gn, formés sur la même troisieme diagonale FG par la seconde DA.

En effet, par le théorême III, le triangle CFG donne $CA.Fm.GD = AF.Gm.CD$

et par le théorême II, le même triangle coupé par la transversale DAn donne $Gn.CD.AF = Fn.GD.AC$.

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on a

$Fm.\ Gn = Fn.\ Gm.$ ou $Fm : Gm :: Fn : Gn.$ Ce qu'il falloit prouver.

Par la même raison les deux autres diagonales DA, CB, seront coupées; la premiere aux points r, m; la seconde aux points r, n, en segments proportionnels; c'est-à-dire qu'on aura pour la premiere $Cr : Br :: Cm : Bm$, et pour la seconde $Dr : Ar :: Dn : An$.

17. Il résulte de toute cette théorie sur les quantités linéaires, considérées seules et sans l'intervention des quantités angulaires, que si sur un plan donné sont placés des points en nombre quelconque, qu'on joigne deux à deux tous ces points, et qu'on mène les diagonales des diverses figures qu'elles forment, il en résultera une multitude de rapports, qui tous pourront être exprimés par des équations à deux termes; lesquels termes auront, les uns deux facteurs seulement, les autres trois, les autres quatre, etc.; et la combinaison de toutes ces équations donnera dans chaque cas les quantités cherchées lorsqu'il y aura un nombre de données suffisant pour que tout le reste soit déterminé. Les bornes de cet écrit ne me permettent pas de m'arrêter sur les conséquences particulieres que fournit cette théorie. Je passe à d'autres objets.

18. Je remarquerai cependant encore, avant d'abandonner cette matiere, que la théorie que nous venons d'exposer sur les triangles et autres figures tracées sur un plan, et composées de lignes droites, s'applique aux triangles sphériques et autres figures composées de grands arcs de cercle tracés sur la surface d'une sphere; avec cette seule différence qu'au lieu des droites dont nous avons parlé, il n'y a qu'à substituer les sinus des arcs qui y correspondent, lorsque la figure est tracée sur la surface d'une sphere.

19. Soit une droite quelconque prise pour terme de comparaison : représentons cette droite par 1, et sur cette même droite comme hypothénuse, construisons des triangles rectangles, en attribuant successivement aux angles aigus toutes

les valeurs possibles depuis o jusqu'à l'angle droit. Formons maintenant un tableau de tous ces triangles : inscrivons dans la premiere colonne le nombre des degrés de l'un des angles ; dans la seconde, la valeur du petit côté qui lui est opposé, c'est-à-dire le nombre abstrait qui le représente lorsque l'hypothénuse est exprimée par 1, ainsi qu'on l'a supposé ; dans la troisieme, la valeur de l'autre des petits côtés ; dans la quatrieme, le rapport du premier de ces petits côtés au second ; dans la cinquieme, le rapport du second au premier ; et enfin dans la sixieme, le second des petits angles. Cela posé, les propriétés connues du triangle rectangle font voir que le nombre inscrit dans la seconde colonne n'est autre chose que le sinus de l'angle inscrit dans la premiere ; que celui de la troisieme en est le cosinus ; celui de la quatrieme, la tangente ; celui de la cinquieme, la cotangente, et qu'enfin le sixieme ou dernier est le complément du premier ; d'où il suit que la table qui résultera de ces diverses colonnes n'est autre chose que la table des sinus, cosinus, etc., et que chacune des lignes horizontales de cette table n'est autre chose que le calcul tout fait d'un triangle rectangle, de celui dont les deux petits angles sont portés, l'un à la premiere colonne, l'autre à la derniere ; qu'enfin cette ligne horizontale contient, non seulement sous les dénominations de *sinus* et *cosinus*, les valeurs des petits côtés du triangle, mais encore sous la dénomination de *tangente* le rapport du premier au second, et sous celle de *cotangente* le rapport du second au premier ; de sorte que la *table des sinus, cosinus*, etc. *n'est autre chose que le calcul tout fait, pour tous les cas possibles, du triangle rectangle dont l'hypothénuse est exprimée par* 1.

Lors donc qu'on a un triangle rectangle à calculer, toute la difficulté se réduit à trouver la ligne horizontale des tables qui lui correspond ; car cette ligne est le calcul tout fait de ce triangle. Par exemple, si l'on connoissoit les deux petits côtés a et b d'un triangle rectangle, il n'y auroit qu'à diviser a par b, et le quotient $\frac{a}{b}$ représenteroit

d'après ce qui vient d'être dit, la tangente de l'angle opposé au petit côté a: en cherchant donc ce nombre $\frac{a}{b}$ dans la quatrième colonne, la ligne horizontale des tables où il se trouvera sera le calcul tout fait du triangle proposé; c'est-à-dire que dans la premiere et la sixieme colonne seront les angles; dans la seconde et la troisieme les valeurs des côtés respectivement opposés à ces angles, en supposant l'hypothénuse représentée par 1; et enfin dans la quatrieme et la cinquieme les rapports de ces mêmes côtés entre eux: savoir, dans la quatrieme celui du premier au second, et dans la cinquieme celui du second au premier; et comme la valeur absolue de ces côtés est donnée par l'hypothese, on aura par une simple proportion la valeur absolue de l'hypothénuse.

C'est ainsi que les tables de sinus donnent la solution de tous les triangles rectangles possibles; et comme il est facile de ramener au calcul des triangles rectangles celui de tous les autres, les tables de sinus suffisent au calcul de toute espece de triangle.

20. La marche qu'on suit ordinairement pour la résolution des triangles en général semble n'avoir pas l'uniformité desirable, parcequ'on emploie pour chaque cas une méthode particuliere, et qu'on ne fait pas assez sentir la liaison et le principe commun de ces diverses méthodes. Cependant de quoi s'agit-il ? de résoudre un problême algébrique dans lequel il y a trois données, et trois inconnues: car, des six choses à considérer dans un triangle, trois étant données, on peut trouver les trois autres; il n'y a donc qu'à former entre ces trois données et ces trois inconnues trois équations, et déduire ensuite de ces équations celle des inconnues qu'on veut avoir, en éliminant les deux autres.

Pour trouver ces trois équations il n'y a qu'à partir de quelque propriété connue du triangle, par exemple, de ce principe, que *chacun des côtés est égal à la somme de*

chacun des deux autres côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.

Concevons en effet un triangle ABC, dont les angles soient désignés respectivement par les mêmes lettres A, B, C, et les côtés opposés à ces angles, respectivement par les lettres minuscules correspondantes a, b, c; d'après le principe que nous venons d'exposer, et qui est évident, en abaissant de chacun des angles une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura

$$a = b.\cos.C + c.\cos.B.$$
$$b = a.\cos.C + c.\cos.A.$$
$$c = a.\cos.B + b.\cos.A.$$

Voilà trois équations renfermant les six choses à considérer : et par conséquent, si de ces six choses on en connoît trois, on trouvera les trois autres, en combinant ces équations par les regles ordinaires de l'algebre.

Supposons, par exemple, qu'on connoisse les trois côtés et qu'on veuille trouver l'angle A; on éliminera d'abord cos. C. Pour cela multiplions la premiere de nos trois équations par a, la seconde par b, et la troisieme par c; retranchons ensuite la premiere ainsi transformée de la somme des deux dernieres également transformées, on aura $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos.A$; d'où l'on tire $\cos.A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc.}$. Ce qu'il falloit trouver.

21. Si l'on veut avoir sin. A, il n'y qu'à mettre dans l'équation précédente, au lieu de cos. A, $\sqrt{1-(\sin.A)^2}$; alors en résolvant l'équation pour avoir sin. A, on aura après la réduction, $\sin.A = \frac{1}{2bc}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-(a^4+b^4+c^4)}$.

Représentons, pour abréger, la quantité radicale par K; nous aurons donc . . . . . $\sin.A = \frac{K}{2bc}$;

Par la même raison . . . . . $\sin.B = \frac{K}{2ac}$;

Et . . . . . $\sin.C = \frac{K}{2ab}$.

En divisant la premiere de ces équations par la seconde, et réduisant, on a $\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. B}} = \frac{a}{b}$, ou sin. A : sin. B :: a : b, qui est le principe de la proportion des sinus des angles avec les côtés opposés.

22. La proposition fondamentale de la théorie des sinus, cosinus, etc. est, comme l'on sait, que si A et B représentent deux angles quelconques, on aura sin. (A + B) = sin. A. cos. B + sin. B. cos. A. Il y a plusieurs manieres de démontrer cette proposition; mais comme l'usage des sinus a été imaginé pour le calcul des triangles, il paroîtroit naturel de tirer cette démonstration des propriétés même de ce triangle, et cela est facile. En effet nous avons vu ci-dessus (n°. 20) qu'on a, $a = b$. cos. C + c. cos. B. De plus le principe de la proportion des angles avec les côtés opposés donne $b = a$. $\frac{\text{sin. B}}{\text{sin. A}}$; $c = a$. $\frac{\text{sin. C}}{\text{sin. A}}$; substituant ces valeurs de b et de c dans l'équation précédente et multipliant tout par $\frac{\text{sin A}}{a}$; il vient sin. A. = sin. B. cos. C + sin. C. cos. B. Mais, puisque dans tout triangle la somme des angles vaut deux droits, l'angle A est le supplément de B + C; donc sin. A = sin. (B + C); donc, en substituant, on a sin. (B + C) = sin. B. cos. C + sin. C. cos. B. Ce qu'il falloit prouver.

23. Si dans cette équation on fait C négatif, sin. C deviendra aussi négatif; mais cos. C ne changera pas. Donc on aura sin. (B — C) = sin. B. cos. C — sin. C. cos. B.

24. Soit C′ le complément de C et K, le quart de la circonférence, on aura donc C′ = K — C, sin. C′ = cos. C, cos. C′ = sin. C; or (n°. 23) sin. (B — C′) = sin. B. cos. C′ — sin. C′ cos. B. Substituant les valeurs précédentes, on aura sin. (B — C′) = sin. B. sin. C — cos. B. cos. C. Mais à cause de C′ = K — C, on a sin. (B — C′) = sin. (B — K + C) = sin. (B + C) — K) = — sin. (K — (B + C)) = — cos. (B + C); substituant cette valeur de sin. (B — C′)

dans l'équation ci-dessus, il vient cos. (B+C) = cos. B. cos. C—sin. B. sin. C.

25. Faisons dans cette derniere équation C négatif: sin. C. deviendra —sin. C, et cos. C. ne changera pas. Donc on aura cos. (B—C) = cos. B. cos. C—sin. B. sin. C.

C'est sur les quatre propositions trouvées (n°s. 22, 23, 24, 25), lesquelles sortent toutes, comme on le vient de voir, de la premiere (n°. 22), qu'est établie toute la théorie des quantités angulaires.

Théoréme VIII.

26. *Soient deux angles quelconques* a, b : *les deux équations suivantes auront toujours lieu.*

Sin. $(a+b)$. sin. $(a-b) = (\text{sin. } a)^2 - (\text{sin. } b)^2$,

Cos. $(a+b)$. cos. $(a-b) = (\text{cos. } a)^2 - (\text{sin. } b)^2$.

En effet on a (n° 22) sin. $(a+b) = \text{sin. } a. \text{ cos. } b + \text{sin. } b \text{ cos. } a$,

et (n° 23) sin. $(a-b) = \text{sin. } a. \text{ cos. } b - \text{sin. } b \text{ cos. } a$.

Multipliant l'une par l'autre ces deux équations, et réduisant, on aura sin. $(a+b)$. sin. $(a-b) = (\text{sin. } a)^2 - (\text{sin. } b)^2$, qui est la premiere partie de la proposition.

On prouvera la seconde partie de la même maniere par le moyen des équations trouvées (n°s. 24 et 25).

27. Comme (sin. a)^2 — (sin. b)^2 = (sin. a + sin. b) (sin. a — sin. b), il suit de la premiere partie de la proposition précédente qu'on a

sin. $(a+b)$: sin. a + sin. b :: sin. a — sin. b : sin. $(a-b)$,

c'est-à-dire que le *sinus de la somme de deux angles quelconques est à la somme des sinus, comme la différence de ces mêmes sinus est au sinus de la différence.*

Théoréme IX.

28. *Soient trois angles quelconques* a, b, c : *les deux équations suivantes auront toujours lieu.*

Sin. a. sin. $(b-c)$ + sin. b. sin. $(c-a)$ + sin. c. sin. $(a-b)=0$
Cos. a: sin. $(b-c)$ + cos. b. sin. $(c-a)$ + cos. c. sin. $(a-b)=0$

En effet on a (n°. 23)

Sin. $(b-c)=$ sin. b. cos. c — sin. c. cos. b
Sin. $(c-a)=$ sin. c. cos. a — sin. a. cos. c
Sin. $(a-b)=$ sin. a. cos. b — sin. b. cos. a.

Multipliant la premiere de ces équations par sin. a, la seconde par sin. b, la troisieme par sin. c; puis ajoutant ces trois équations ainsi transformées, et réduisant, on aura, etc. Ce qu'il falloit trouver.

Les deux équations que nous venons de trouver ayant lieu pour trois angles quelconques, s'appliquent évidemment aux trois angles de tout triangle.

Théoréme X.

29. *Soit une série d'angles quelconques* a, b, c, d....p: *les deux équations suivantes auront toujours lieu.*

Sin. $(a+b)$. sin. $(a-b)$ + sin. $(b+c)$. sin. $(b-c)$ + etc...
+ sin. $(p+a)$. sin. $(p-a)=0$
Cos. $(a+b)$. sin. $(a-b)$ + cos. $(b+c)$. sin. $(b-c)$ + etc...
+ cos. $(p+a)$. sin. $(p-a)=0$.

En effet on a (n°. 26)

Sin. $(a+b)$. sin. $(a-b)=$ (sin. a)^2 — (sin. b)^2
Sin. $(b+c)$. sin. $(b-c)=$ (sin. b)^2 — (sin. c)^2
Sin. $(c+d)$, etc.

. . . . . .
Sin. $(p+a)$. sin. $(p-a)=$ (sin. p)^2 — (sin. a)^2.

Ajoutant toutes ces équations ensemble, le second membre s'évanouit, et il reste, etc. Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

De même nous avons (n° 23 et 24)

Sin. $(a-b)=$ sin. a. cos. b — sin. b. cos. a
Cos. $(a+b)=$ cos. a. cos. b — sin. a. sin. b.

Multipliant ces deux équations, et réduisant, on aura
Cos. $(a+b)$. sin. $(a-b)=$ sin. a. cos. a — sin. b. cos. b;
pareillement cos. $(b+c)$. sin. $(b-c)=$ etc.

Ajoutant ensemble toutes ces équations, le second membre s'évanouira, et il restera, etc. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

30. Supposons que les angles $a, b, c, \ldots p$, forment une progression arithmétique, dont le premier terme soit o, dont la raison soit m, et dont le dernier terme p soit la circonférence entiere, nous aurons $b - a = m$, $c - b = m$, etc. $a + b = m$, $b + c = 3m$, etc. Donc les équations deviennent, en divisant tout par sin. m.

Sin. m + sin. $3m$ + sin. $5m$ + etc. = o
Cos. m + cos. $3m$ + cos. $5m$ + etc. = o.

31. Soit k un autre angle quelconque : on aura (n°. 23)

Sin. $(k + m)$ = sin. k. cos. m + sin. m. cos. k
Sin. $(k + 3m)$ = sin. k. cos. $3m$ + sin. $3m$. cos. k
etc.

Ajoutant toutes ces équations, et observant que par l'article précédent les coëfficients de sin. k et cos. k dans le second membre de l'équation sont chacun égal à zéro, ce qui fait évanouir ce second membre, on aura

Sin. $(k+m)$ + sin. $(k+3m)$ + sin. $(k+5m)$ + etc. = o,

et par un calcul semblable

Cos. $(k+m)$ + cos. $(k+3m)$ + cos. $(k+5m)$ + etc. = o.

32. Supposons dans les deux équations que nous venons de trouver $k + m = q$, elles se réduiront aux deux suivantes.

Sin. q + sin. $(q+2m)$ + sin. $(q+4m)$ + etc. = o
Cos. q + cos. $(q+2m)$ + cos. $(q+4m)$ + etc. = o.

33. Soit $2m = r$: les deux équations précédentes deviendront

Sin. q + sin. $(q+r)$ + sin. $(q+2r)$ + sin. $(q+3r)$ + etc. = o
Cos. q + cos. $(q+r)$ + cos. $(q+2r)$ + cos. $(q+3r)$ + etc. = o

Théorême XI.

34. *Si l'on divise la circonférence entière en un nombre quelconque* n *de parties égales, dont chacune soit* g, *et que* f *représente un autre arc quelconque, on aura toujours les deux équations suivantes, les quantités* f *et* g *pouvant être positives ou négatives.*

$$\text{Sin.}(f+g)+\text{sin.}(f+2g)+\text{sin.}(f+3g)+\ldots+\text{sin.}(f+ng)=0$$

$$\text{Cos.}(f+g)+\text{cos.}(f+2g)+\text{sin.}(f+3g)+\ldots+\text{sin.}(f+ng)=0$$

En effet ces deux équations ne sont autre chose que celles trouvées dans l'article précédent, en faisant $q=f+g$ et $r=g$. On va voir que ce théorême donne lieu à des applications intéressantes.

35. Soit AKB (Fig. 6) une circonférence dont je suppose le centre au point O ; soient pris sur cette circonférence deux points A, B, diamétralement opposés, et qui par conséquent la divisent en deux parties égales : on sait que si de chacun de ces deux points A, B, on mene des droites AK, BK, à un troisieme point K pris à volonté sur la circonférence, la somme $\overline{AK}^2+\overline{BK}^2$ des quarrés de ces droites est égale au quarré du diametre, ou quatre fois le quarré du rayon, et par conséquent constante, c'est-à-dire toujours la même, quel que soit le point K pris sur la circonférence.

Comme l'angle K est nécessairement droit, ce principe est, à proprement parler, celui du quarré de l'hypothénuse ; mais il est susceptible d'extension. En effet :

36. Soit divisée cette même circonférence en trois parties égales aux points A, B, C (Fig. 7), de maniere que ABC soit un triangle équilatéral. Je dis que si de ces trois points on mene les droites AK, BK, CK, à un quatrieme point K

pris sur la circonférence, la somme des quarrés de ces trois droites sera aussi une quantité constante, c'est-a-dire la même, à quelque point de la circonférence que soit placé le point K, et que cette somme sera six fois le quarré du rayon.

37. Soit maintenant divisée cette même circonférence en quatre parties égales, puis en cinq, puis en six; enfin en un nombre quelconque de parties égales (Fig. 8) par les points A, B, C, D, etc., de maniere que ABCD etc. soit un polygone régulier. Je dis que si l'on prend à volonté sur la circonférence un point K, la somme des quarrés des droites menées de tous les angles de ce polygone à ce point K sera encore une quantité constante, et égale au quarré du rayon multiplié par deux fois le nombre des côtés du polygone.

38. Enfin si l'on décrit (Fig. 9) une autre circonférence MNK concentrique à la premiere d'un rayon plus grand ou plus petit que celui de cette premiere circonférence, un principe semblable aura encore lieu, c'est-à-dire que si l'on prend à volonté sur cette nouvelle circonférence un point K, et que de tous les angles de ce polygone on mene à ce point des droites, la somme des quarrés de ces droites sera encore une quantité constante, ou la même pour tous les points de la circonférence où l'on voudra placer le point K; et cette quantité sera la somme faite des quarrés des rayons des deux circonférences concentriques, multipliée par le nombre des côtés du polygone, d'où suit le théorême suivant.

Théoréme XII.

39. *Si dans une circonférence* (Fig. 9), *dont le rayon soit* R, *on inscrit un polygone régulier quelconque, dont le nombre des côtés soit* n, *et qu'ayant décrit une autre circonférence, dont le rayon soit* r, *concentrique à la premiere, on prend sur cette derniere un point* K *à volonté, la somme des carrés des distances de ce point* K

à chacun des angles du polygone sera $n(R^2+r^2)$ *et par conséquent toujours la même, quel que soit le point* K.

En effet, par le centre commun o des circonférences concentriques, et par le point K, soit menée la droite indéfinie oK, ainsi que des rayons oA, oB, etc. à tous les angles du polygone. Cela posé (n°. 20) nous aurons

$$\overline{AK}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OK}^2 - 2.\overline{OA}.\overline{OK}.\cos.AOK.$$

Pareillement $\overline{BK}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OK}^2 - 2.\overline{OB}.\overline{OK}.\cos.BOK,$

$$\overline{CK}^2 = \text{etc.}$$

. . . . . .

Ajoutant ensemble toutes ces équations, nous aurons

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 + \text{etc.} = n.R^2 + n.r^2 - 2.r.R.$$
$$(\cos.AOK + \cos.BOK + \cos.COK + \text{etc.})$$

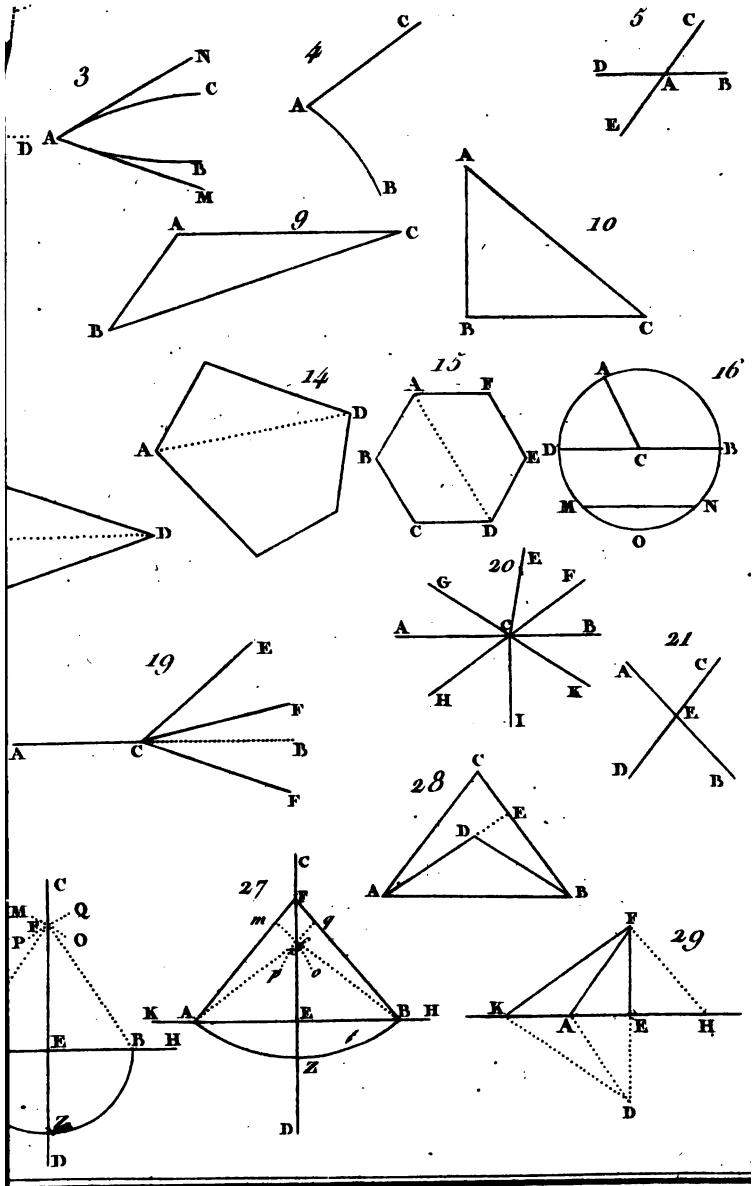
Mais il est évident qu'en faisant l'angle du centre $AOB=g$, et $FOK=f$, ce qui donne $AOK=f+g$, $BOK=f+2g$, $COK=f+3g$, etc., la quantité qui est entre parenthese deviendra $\cos.(f+g)+\cos.(f+2g)+\cos.(f+3g)+\text{etc.}\ldots+\cos.(f+n.g)$.

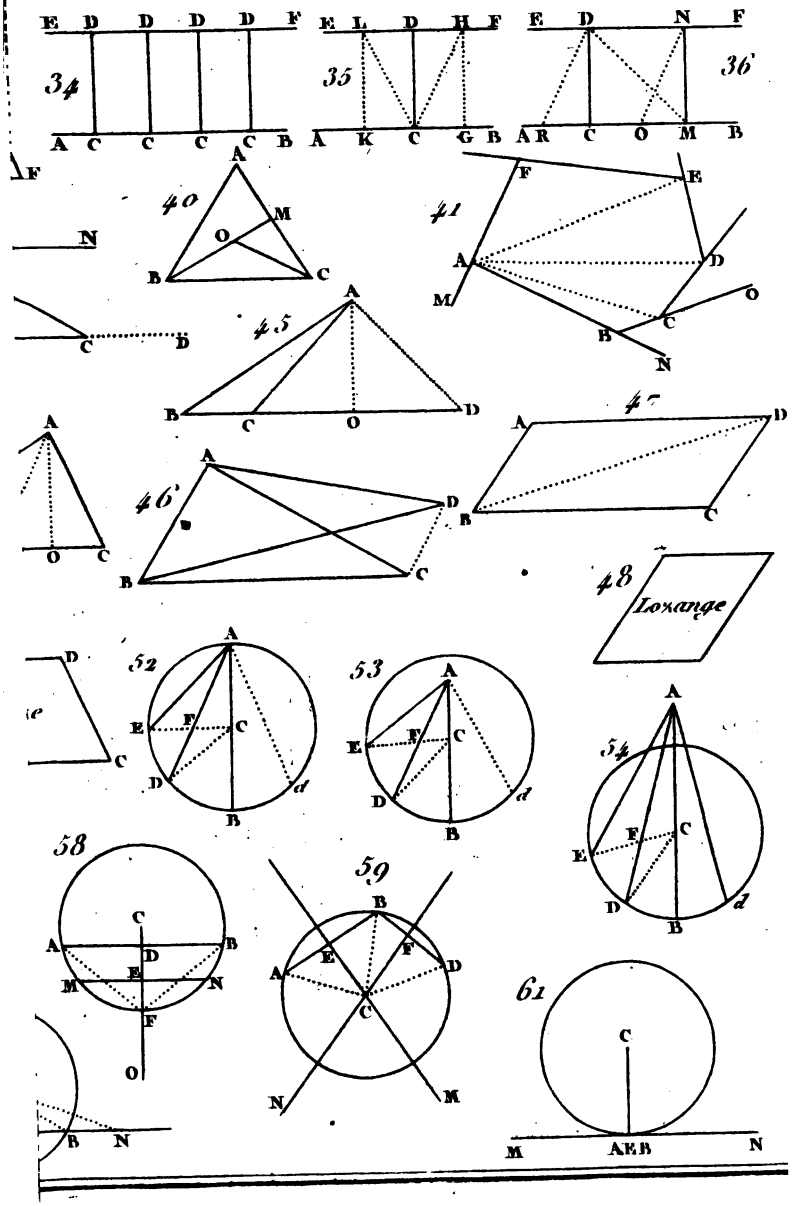
Or, par le théorême XII, cette quantité est égale à zéro. Donc l'équation que nous venons de trouver se réduit à $\overline{AK}^2+\overline{BK}^2+\overline{CK}^2+\text{etc.}=n(R^2+r^2)$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si les deux rayons sont égaux, le second membre deviendra $2nR^2$.

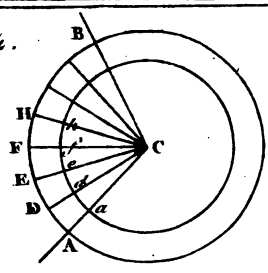
40. Cette proposition s'étend, avec quelques modifications, aux polygones irréguliers et aux polygones gauches, c'est-à-dire dont tous les angles ne sont pas dans un même plan; elle s'applique même aux polyèdres réguliers et irréguliers: mais ces détails nous conduiroient trop loin.

FIN.

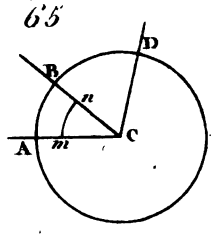

3
N
C
A
D
B
M
4
C
A
B
5
C
D
A
B
E
9
A
C
B
10
A
B
C
14
D
A
15
A
F
B
E
C
D
16
A
D
C
B
M
N
O
D
20
E
G
F
A
C
B
H
K
I
19
E
F
A
C
B
F
21
A
C
E
D
B
28
C
E
D
A
B
27
C
F
m
g
p
o
K
A
E
B
H
t
Z
D
M
Q
P
O
29
F
K
A
E
H
D


34
35
36
40
41
45
46
47
48
Loxange
52
53
54
58
59
61

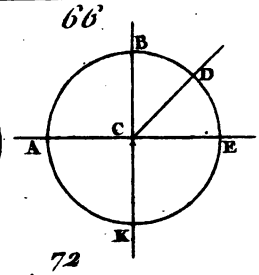
64.



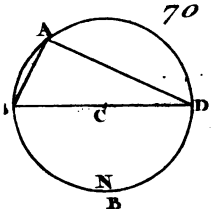
65



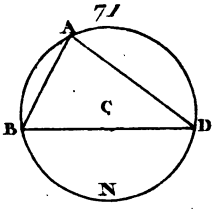
66



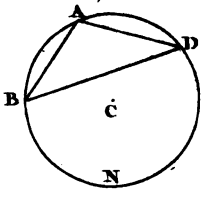
70

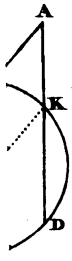


71

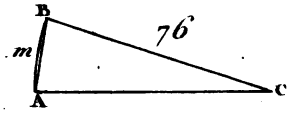


72

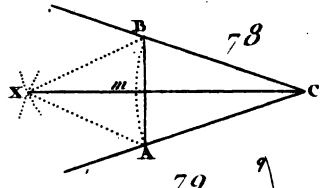


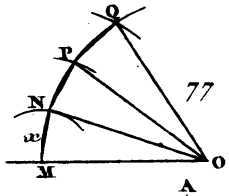


76

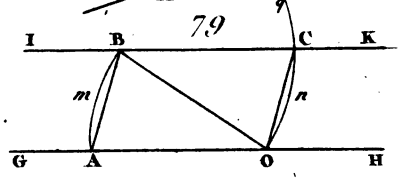


78



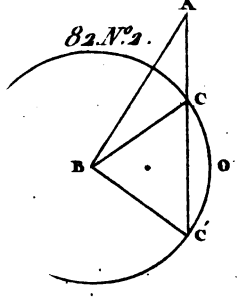


79

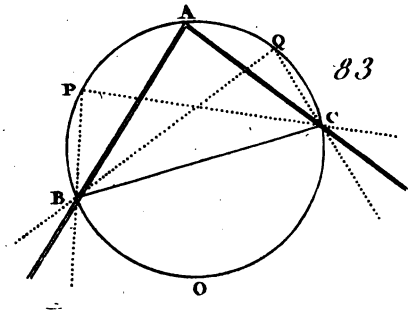


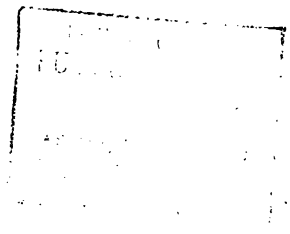
N.° 1.

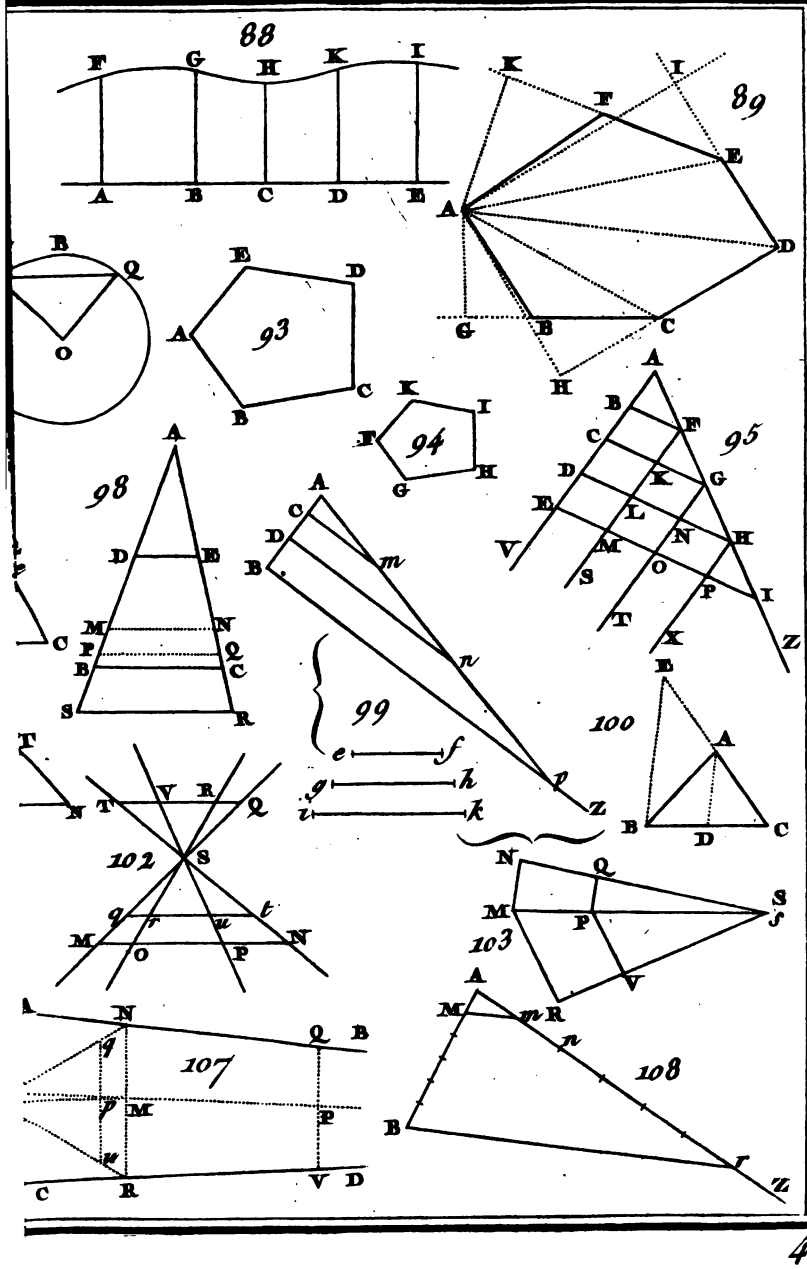
82. N.° 2.

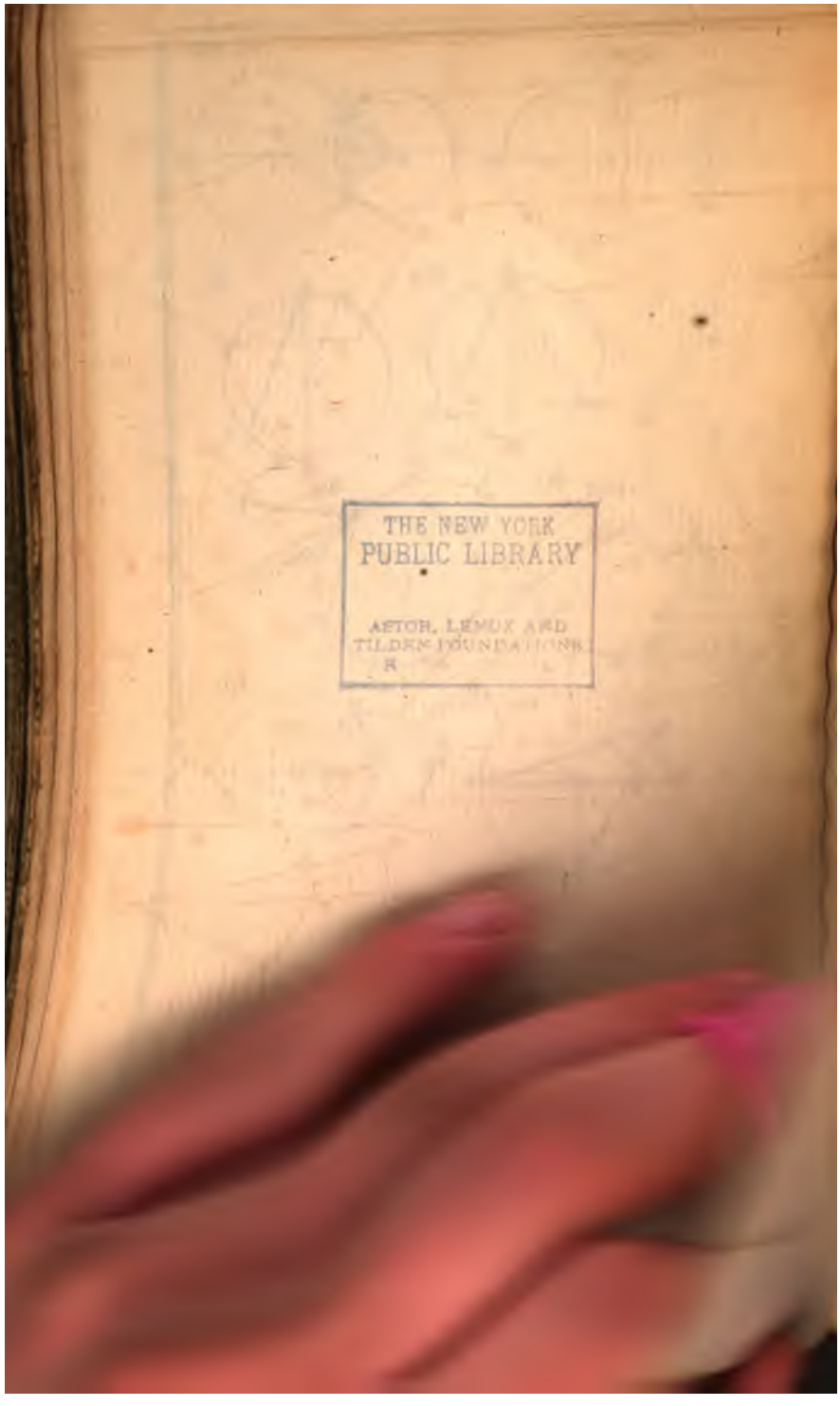


83

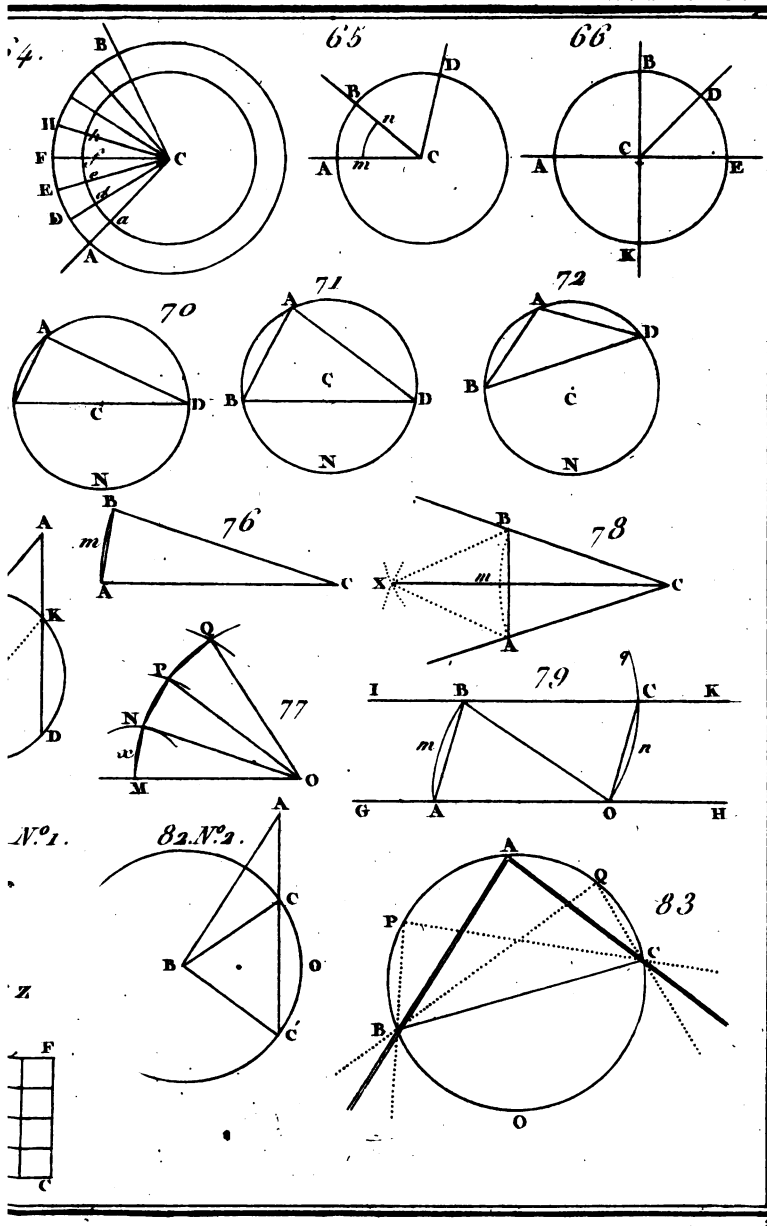


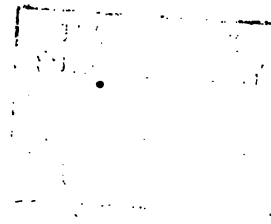


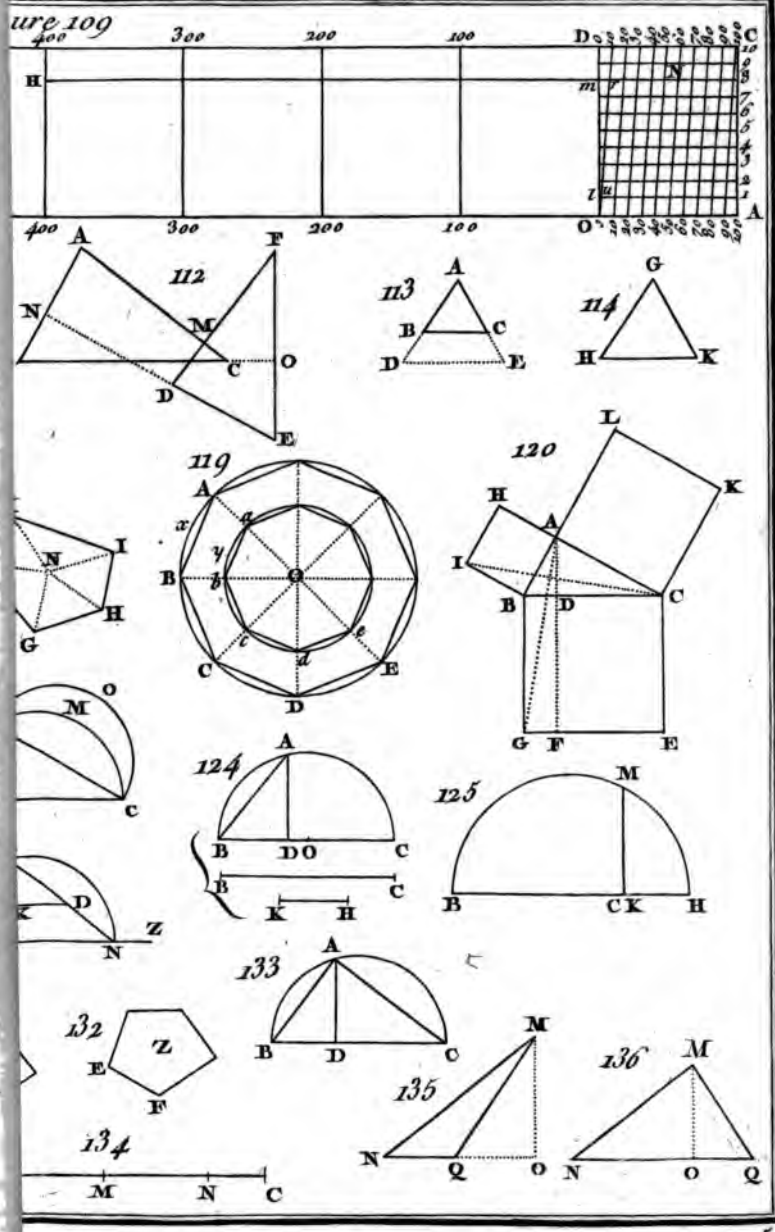

88
F G H K I
A B C D E
89
K I F E D A G B C H
B Q O
93
E D A C B
94
K I F H G
98
A D E M N P Q B C S R
99
e f g h i k
100
E A B D C
95
A B F C K G D L E V M N H S O P I T X Z
102
T N V R Q S q r u t M O P N
103
N Q M P S s V
107
A N Q B q p M P u C R V D
108
A M m R n B l Z

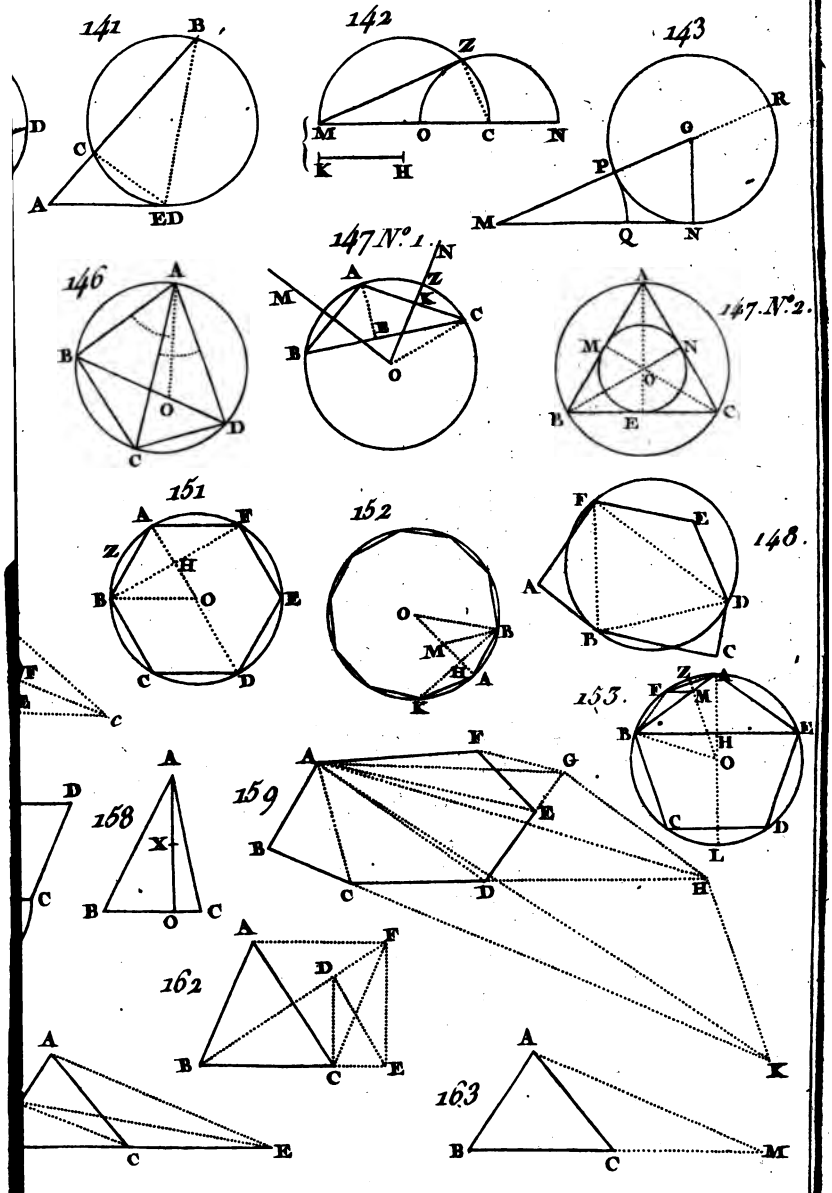

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

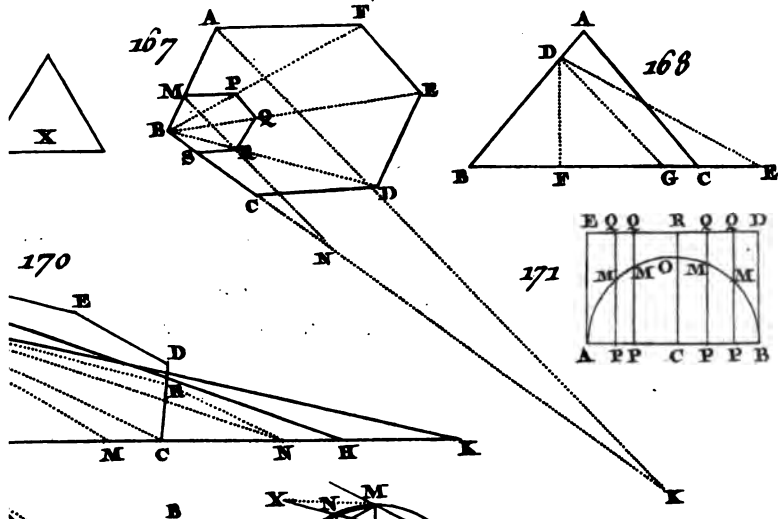
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R

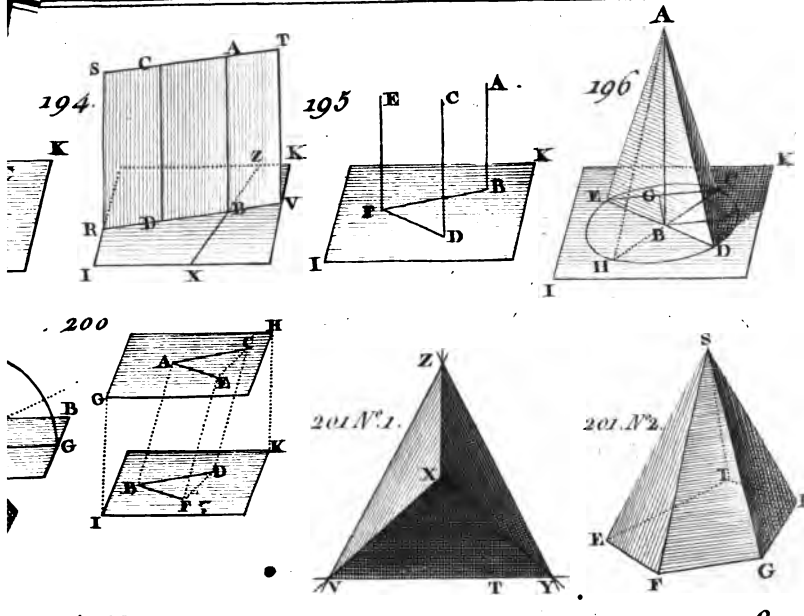

64.
B
H
F
E
D
A
C
65
B
D
n
A
m
C
66
B
D
A
C
E
K
70
A
C
D
N
71
A
B
C
D
N
72
A
D
B
C
N
A
K
D
B
m
76
A
C
B
78
X
m
C
A
O
P
N
77
w
M
O
9
I
B
79
C
K
m
n
G
A
O
H
N.° 1.
82. N.° 2.
A
C
B
O
C'
Z
F
C
A
Q
83
P
C
B
O

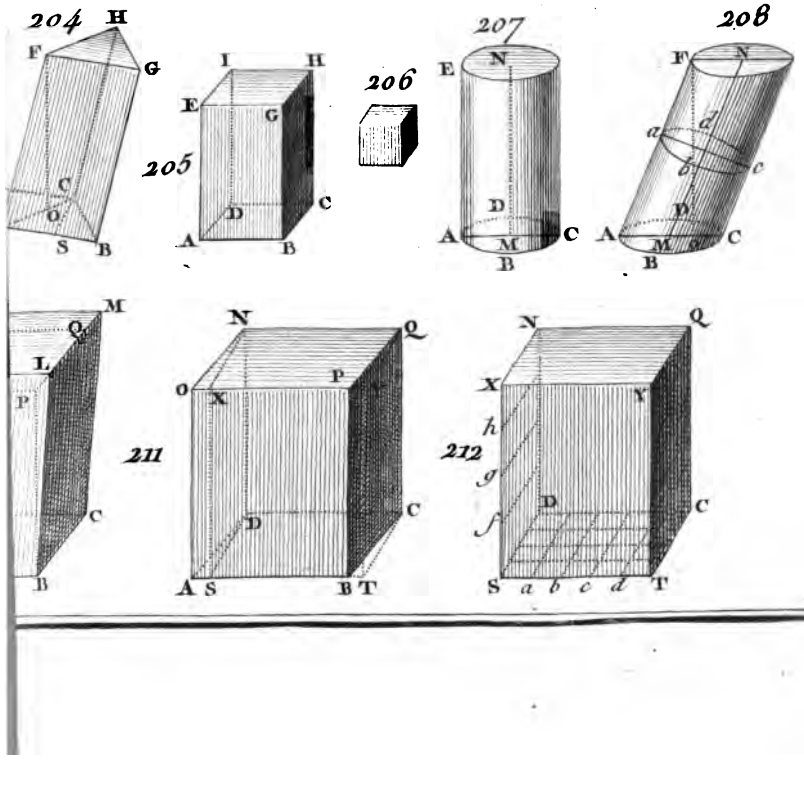


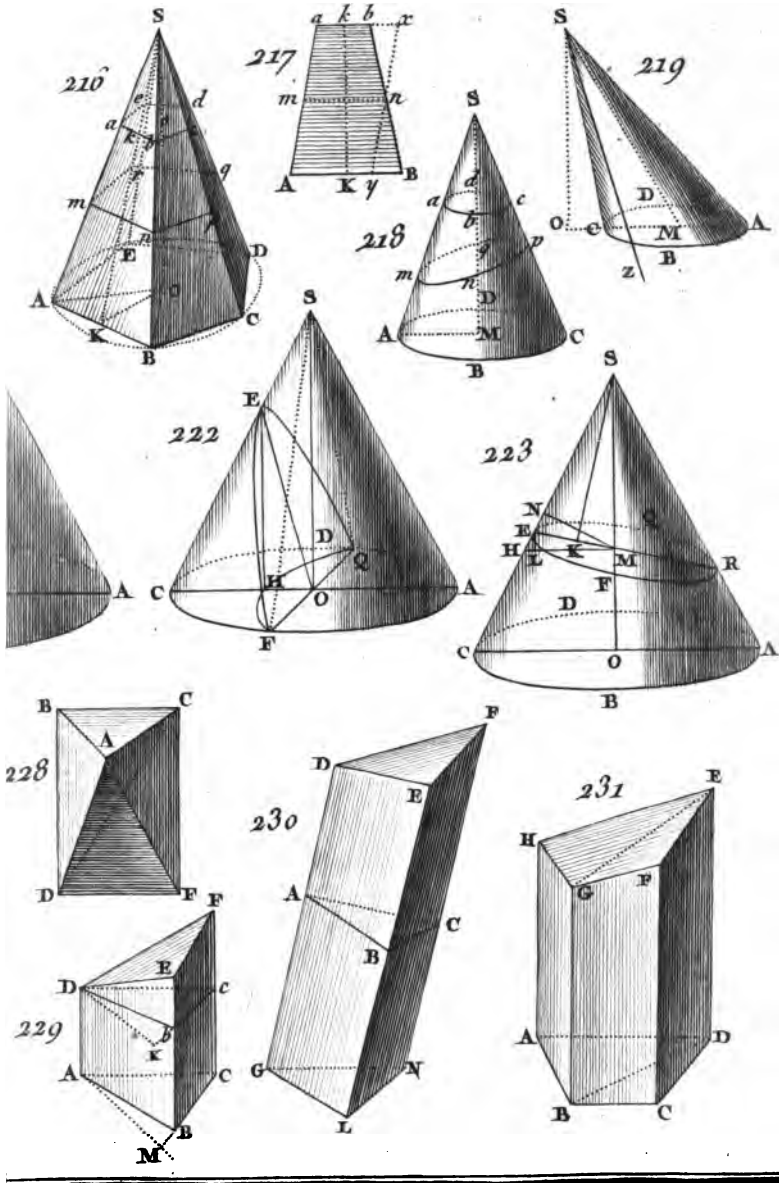

ure 109
400
300
200
100
0
H
N
m
l
A
112
113
114
119
120
124
125
132
133
134
135
136

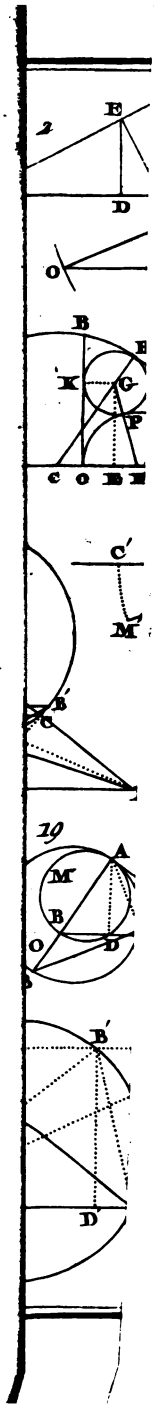

141
142
143
146
147 N°. 1.
147. N°. 2.
148.
151
152
153.
159
162
163
168

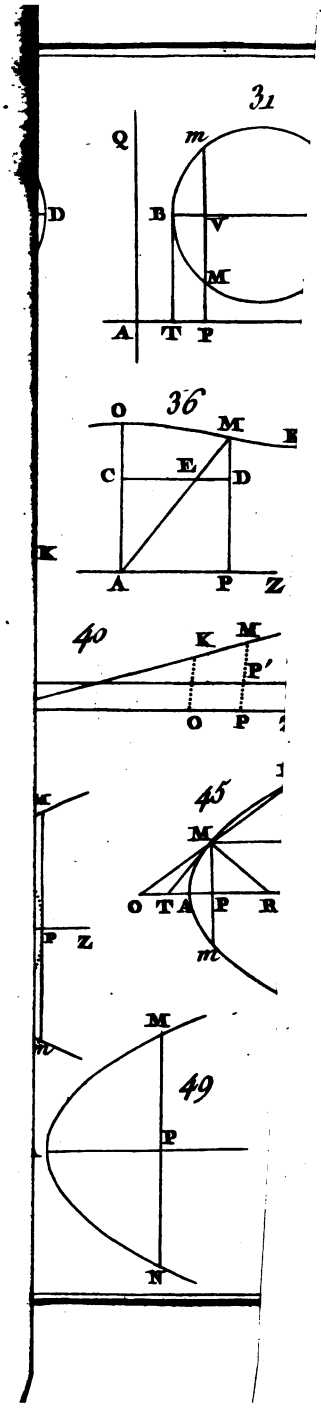

167
A
F
M
P
E
B
Q
S
R
C
D
N
X
168
A
D
B
F
G
C
E
170
E
D
M
C
N
H
K
171
E Q Q R Q Q D
M M O M M
A P P C P P B
B
N
C
D
178
X
N
M
A
B
P
O
C
179
M
N
A
P
O
B
182
C
D
A
B
183
F
O
E
A
D
B
C
184
A
F
O
E
B
C
D
L
M
K
P
G
H
I
188
D
N
C
189
C
A
B
K
D
190
C
E
B
A
F
D
C

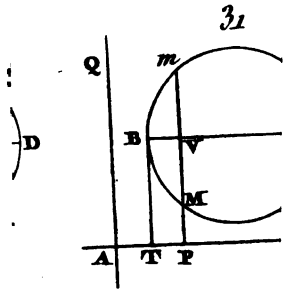

194
195
196
200
201 N°1.
201 N°2.

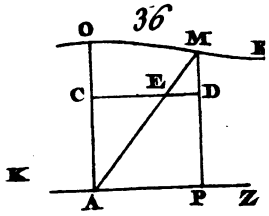

204
205
206
207
208
211
212

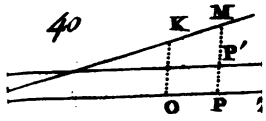

210
217
218
219
222
223
228
229
230
231

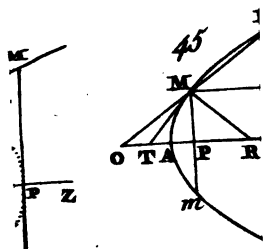

E
D
O
B
E
K
G
F
C
O
C′
M′
B′
C
A
M
B
O
D
B′
D′

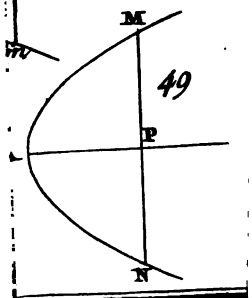

31
Q
m
D
B
V
M
A
T
P
36
O
M
E
C
E
D
K
A
P
Z
40
K
M
P'
O
P
45
M
O
T
A
P
R
m
P
Z
M
49
P
N

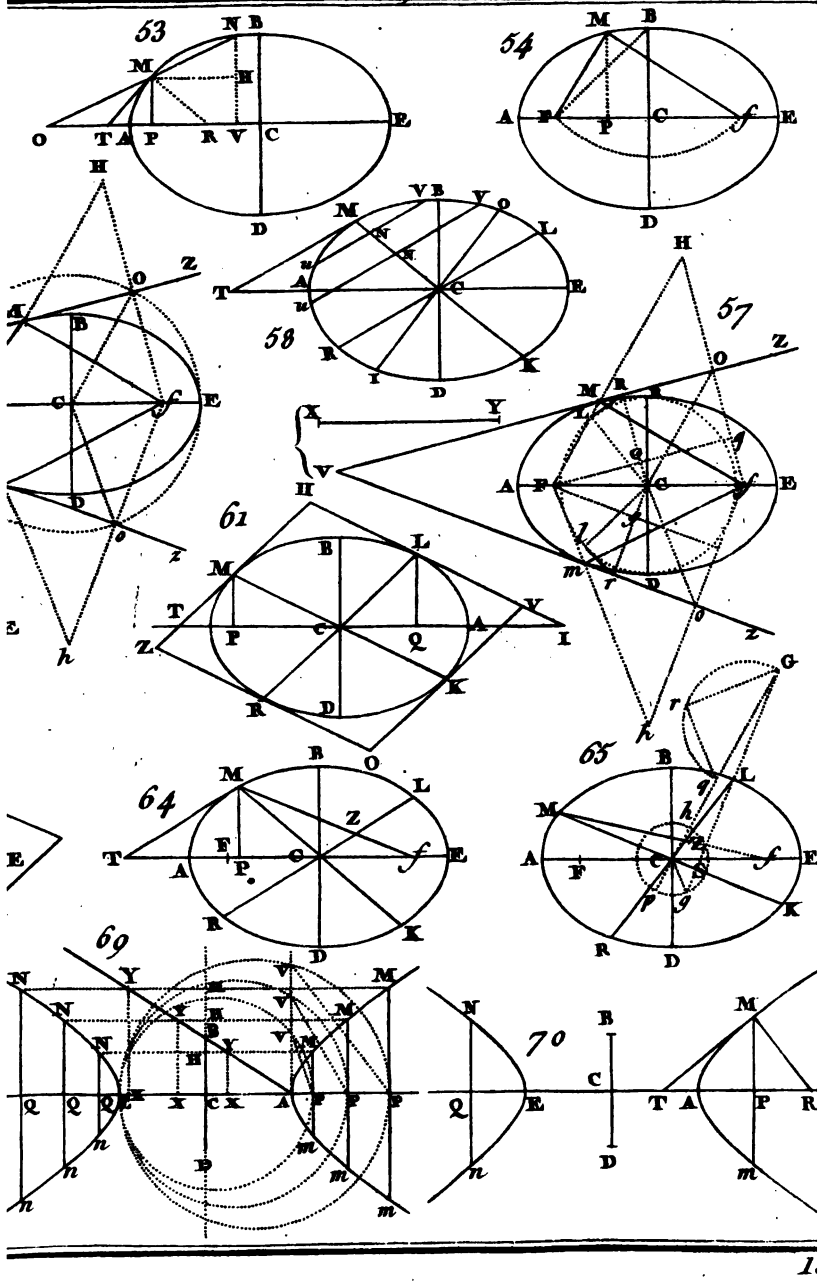

31
Q
m
D
B
V
M
A
T
P


36
O
M
E
C
D
K
A
P
Z


40
K
M
P'
O
P


45
M
O
T
A
P
R
m
P
Z
m


M
49
P
N


53
54
55
56
57
58
61
64
65
69
70